Catalan-Zahlen

Benannt nach dem belgischen Mathematiker EUGÈNE CHARLES CATALAN (1814–1894) beschreiben die **Catalan-Zahlen** C_n eine Folge natürlicher Zahlen, die in vielen kombinatorischen Problemen auftaucht:

- C_n ist die Anzahl der Dyck-Wörter der Länge $2n$. Ein **Dyck-Wort** ist eine Zeichenkette aus zwei Zeichen (und), die im Wort gleich oft vorkommen, und kein Anfangsteilstück des Wortes enthält mehr) als (; also die Anzahl der korrekt geklammerten Ausdrücke mit n Klammerpaaren.
- C_n ist die Anzahl der **Klammerungen** eines Produkts mit $n+1$ Faktoren.
- C_n ist die Anzahl der **Binärbäume** mit $n+1$ Blättern (bzw. n internen Knoten oder $2n+1$ Knoten). (Mache aus dem Ausdruck mit binärem Operator einen binären Operatorbaum).
- C_n ist die Anzahl der **monotonen Wege** in einem $n \times n$-Gitter von der Ecke links unten zur Ecke recht oben, die die Diagonale nicht überqueren. Ein monotoner Weg verläuft nur nach oben oder nach rechts. („nach rechts“ steht für „(“ und „nach oben“ für „)“)
- C_n ist die Anzahl der Berge, die mit n Schrägstrichen nach oben und n Schrägstrichen nach unten gezeichnet werden können.
- C_n ist die Anzahl der Möglichkeiten, ein konvexes $(n+2)$-Eck durch Diagonalen in Dreiecke zu zerlegen (Triangulation), sofern man verschiedene Richtungen getrennt zählt (**Eulersches Polygonteilungsproblem**).
- C_n ist die Anzahl der Möglichkeiten, dass sich $2n$ Personen, die an einem runden Tisch sitzen, jeweils einer anderen Person die **Hand geben** können, ohne dass sich Arme überkreuzen.

Catalan-Zahlen

n	C_n
0	1
1	1
2	2
3	5
4	14
5	42
6	132
7	429
8	1.430
9	4.862
10	16.796
11	58.786
12	208.012
13	742.900
14	2.674.440
15	9.694.845
16	35.357.670
17	129.644.790
18	477.638.700
19	1.767.263.190
20	6.564.120.420
21	24.466.267.020
22	91.482.563.640
23	343.059.613.650
24	1.289.904.147.324
25	4.861.946.401.452

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, \text{ für } n \geq 1$$

$$C_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n = -1 \\ \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot C_{n-i} & \text{, falls } n \geq 0 \end{cases}$$

$$C_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n = -1 \\ \frac{2(2n+1)}{n+2} \cdot C_n & \text{, falls } n \geq 0 \end{cases}$$

Die erzeugende Funktion ist

$$\mathcal{B}_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot z^n = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$$

Nur die Catalan-Zahlen C_n mit $n = 2^k - 1$ sind ungerade, nur C_2 und C_3 sind prim.

Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics: Vol. 2* beschreibt viele weitere Interpretationen der Catalan-Zahlen.
`http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/`