Lösungen zum 10. Theelachter MaPhIA-Rundbrief (Juli 2021)

Problem 1: Einschulung

33 Schüler gehen in die neue Klasse. Als sie sich vorstellen, merken sie, dass viele Vor- und Nachnamen mehrfach vorkommen, obwohl alle nur einen Vor- und einen Nachnamen haben. Um der Sache auf den Grund zu gehen, schreibt jedes Kind an die Tafel, wie viele Mitschüler den gleichen Vornamen haben wie es selbst. Und danach, wie viele den gleichen Nachnamen haben. Nie zählt es sich selbst mit. 66 Zahlen stehen jetzt auf der Tafel. Und jede Zahl von 0 bis 10 kommt dort vor.

In dieser Klasse haben mindestens zwei Schüler den gleichen Vor- und Nachnamen. Warum? Wie heißen diese?

Eine 10 an der Tafel bedeutet, dass ein Schüler 10 Mitschüler mit gleichem Vor- oder Nachnamen hat. Also gibt es 11 Schüler mit diesem Namen. Jeder dieser 11 Schüler hat eine 10 aufgeschrieben. Also steht auf der Tafel mindestens elfmal eine 10.

Entsprechend steht die Zahl 9 mindestens zehnmal an der Tafel, denn es gibt 10 Schüler, die eine 9 notiert haben. Die 8 taucht neunmal auf, die 7 mindestens achtmal und so weiter bis zur 0, die mindestens einmal aufgeschrieben wurde.

An der Tafel stehen deshalb mindestens $11 + 10 + 9 + 8 + ... + 2 + 1 = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$ Zahlen.

Da dort aber genau 66 Zahlen stehen (es sind ja 33 Schüler), kennen wir schon alle Zahlen: Es gibt genau eine 0, zweimal die 1, dreimal die 2, … und elfmal die 10.

Es gibt daher 11 verschiedene Namen. Wir wissen aber nicht, ob diese Namen Vornamen oder Nachnamen sind. Wir nehmen an, es sind n Vornamen und $11-n$ Nachnamen.

Daraus lassen sich $n \cdot (11-n)$ verschiedene Kombinationen aus Vor- und Nachname bilden.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n \cdot (11-n)$	0	10	18	24	28	30	30	28	24	18	10	0

Es lassen sich also maximal 30 verschiedene Kombinationen aus Vor- und Nachname bilden. Da die Klasse aber 33 Schüler hat, gibt es zwei Schüler mit gleichem Vor- und Nachnamen.

Wie heißen diese? Nun, in Ostfriesland vermutlich Janßen, aber ausrechnen kann man die Namen dieser Schüler so natürlich nicht!

Problem 2: Raketenstart

Warum starten Raketen auf der Erde immer nach Osten? Und warum gerne nah am Äquator?

Die Erde dreht sich von West nach Ost (deshalb geht die Sonne im Osten auf!) und diesen Impuls nimmt man gerne mit (und arbeitet schon gar nicht gegen ihn). Am Äquator dreht sich die Erde mit einer Geschwindigkeit von $\frac{40000 \text{ km}}{24 \text{ h}} = 1667$ km/h um die eigene Achse und sonst mit $1667 \text{ km/h} \cdot \cos\alpha$, wobei α der Breitengrad der Startrampe ist. D.h. der Vorteil durch die Erdrotation nimmt zum Pol hin dramatisch ab.

Problem 3: Durchschnittsgehalt

Neun leitende Angestellte einer Firma haben alle ein gutes Monatsgehalt, aber keiner weiß, wie viel sein Kollege verdient. Jeder hat im Arbeitsvertrag unterschrieben, seinen Kollegen die Höhe seines Gehalts nicht zu verraten. Alle würden gerne wissen, ob sie über- oder unterdurchschnittlich verdienen. Wie können die Angestellten ohne fremde Hilfe ihr Durchschnittsgehalt ermitteln, ohne dass einer das Gehalt eines einzelnen ausrechnen kann?

Einer der Angestellten denkt sich eine große Zahl X aus, ohne sie den anderen zu verraten, addiert sein Monatsgehalt hinzu und flüstert die Summe einem seiner Kollegen ins Ohr. Dieser zählt sein Gehalt zum gehörten Betrag dazu und flüstert das Ergebnis einem dritten Angestellten zu. So geht das weiter bis schließlich der letzte Angestellte sein Ergebnis dem ersten zuflüstert. Dieser zieht vom gehörten Betrag die Zahl X wieder ab, teilt das Ergebnis durch 9 und erhält so das Durchschnittsgehalt, das er seinen Kollegen nennt.

Problem 4: Primzahlpalindrome

Berechne alle Primzahlen mit einer geraden Anzahl von Stellen, die ein Palindrom sind.
Wie viele gibt es?

Ein Palindrom ist eine Zahl, die –vorwärts und rückwärts gelesen– den gleichen Wert hat.

11 ist ein zweistelliges Palindrom und eine Primzahl. Alle anderen Palindrome mit gerader Stellenzahl sind durch 11 teilbar und daher keine Primzahlen!

Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme ein Vielfaches von 11 ist. Die alternierende Quersumme einer Zahl erhält man, indem man ihre Ziffern abwechselnd addiert und subtrahiert. So hat z.B. die alternierende Quersumme von 193658 den Wert $1-9+3-6+5-8=-14$. Daher ist 193658 nicht durch 11 teilbar.

Jedes Palindrom p mit einer geraden Stellenzahl hat die Ziffernfolge $a_1a_2a_3...a_na_n...a_3a_2a_1$.
Die alternierende Quersumme von p ist $a_1-a_2+a_3-...\pm a_n \mp a_n \ldots - a_3+a_2-a_1=0$.
0 ist durch 11 teilbar und damit jedes Palindrom mit einer geraden Anzahl von Stellen.