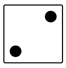
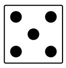
Lösungen zum 2. Theelachter MaPhIA-Rundbrief (August 2019)

Aufgabe 1: The Dark Side of the ~~Moon~~ Dice

Du hast gewürfelt. Die  liegt oben.
Weißt Du –ohne nachzugucken–, welche Zahl unten liegt? Warum?
Falls nicht, schau Dir einen Spielewürfel genau an. Was stellst Du fest?

Die Seite, die unten liegt, ist  .
Die Summe der Augen zweier gegenüber liegender Seiten beim Würfel ist immer 7.

Aufgabe 2: Coupons

Ein Geschäft hat Dir Rabattcoupons geschickt, jeder Coupon ist für genau einen Artikel gültig. Ein Coupon ermöglicht 20% Rabatt, ein anderer 15% und zwei weitere je 10%. Du wolltest dort lange schon fünf Produkte kaufen, drei kosten je 10€, eins kostet 20€ und eins 40€.

Wie viel musst Du mindestens bezahlen?
Wie viel Rabatt hast Du dann im Durchschnitt bekommen?

Offenbar ist die beste Strategie, das teuerste Produkt mit dem höchsten Rabatt zu belegen und dann mit den restlichen Produkten und Coupons genauso fortzufahren.

D.h., zu bezahlen sind 32€ (40€ minus 20%) und 17€ (20€ minus 15%) sowie zweimal 9€ (10€ minus 10%) und schließlich 10€ (ohne Coupon). Insgesamt also 77€.

Statt 90€ hast Du 13 € weniger bezahlt, das macht einen Rabatt von $\frac{13}{90} \approx 0,144 = 14,4\%$.

Aufgabe 3: Sheldon's Best Number

Für Sheldon Cooper aus der Fernsehserie *The big bang theory* ist die **beste Zahl** eine Zahl p,

1. die eine Primzahl ist,
2. das Produkt q der Ziffern von p angibt, die wievielte Primzahl sie ist.
3. liefert die Zahl p –rückwärts gelesen– eine weitere Primzahl $\bar{p}$ und
4. gibt q –rückwärts gelesen– an, die wievielte Primzahl $\bar{p}$ ist.

Probieren wir z.B. die 17.

1. 17 ist eine Primzahl ☺
2. das Produkt seiner Ziffern ist $1 \cdot 7 = 7$ und 17 ist tatsächlich die 7. Primzahl ☺
3. 17 rückwärts gelesen ergibt 71. 71 ist ebenfalls eine Primzahl ☺
4. 71 ist die 20. Primzahl, also leider nicht die 7. (7 rückwärts gelesen ist 7). ☹

Kennst Du eine beste Zahl? Oder sogar zwei?

73 erfüllt (als einzige Zahl) diese Eigenschaften. (Sheldon Fans gucken jetzt die 73. Folge ...) 73 ist die $7 \cdot 3 = 21$. Primzahl. 37 ist die 12. Primzahl. Primzahlen sind ja bekanntlich alle natürlichen Zahlen mit genau zwei Teilern, also 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ...

Der Beweis, dass 73 die *einzige* beste Zahl ist, ist kompliziert. Er steht in
`https://math.dartmouth.edu/~carlp/sheldon02132019.pdf`

Die folgenden Zahlen erfüllen die ersten beiden Eigenschaften

$$p_7 = 17,\ p_{21} = 73 \text{ und } p_{181.440} = 2.475.989.$$

Die letzten Eigenschaften werden oft von Spiegelzahlen erfüllt, z.B. $p_{8.114.118} = 143.787.341$.

Aufgabe 4: The Second Throw

Du würfelst zweimal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Augenzahl größer ist als die erste?

Zusatzfrage: Wird die Wahrscheinlichkeit größer oder kleiner, wenn Du statt des Würfels einen Ikosaeder, also einen Körper mit 20 gleichen Seiten, nimmst?

Ein Würfel hat 6 Seiten mit den Werten 1 bis 6. Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen zu können, benötigen wir die Anzahl aller möglichen Wurfergebnisse und die aller „günstigen" Wurfergebnisse (also die, bei denen der Würfel im zweiten Wurf eine größere Zahl zeigt).

Ein Wurfergebnis ist offenbar ein Paar aus erstem Wurf und zweitem Wurf, z.B. (4, 3).

Die Anzahl der möglichen Wurfergebnisse ist 36: 6 Möglichkeiten für den ersten Wurf und für jede dieser Möglichkeiten 6 weitere Möglichkeiten für den zweiten Wurf.

	Wurf 2					
Wurf 1	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Die günstigen Wurfergebnisse sind grün markiert. Es gibt offenbar 15 Möglichkeiten.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich nun aus dem Quotienten der günstigen Ergebnisse zu allen Ergebnissen: $\frac{15}{36} \approx 0,4167 = 41,67\%$.

Guckt man sich die Tabelle an, so erkennt man, dass die Anzahl der günstigen Wurfergebnisse gerade die Hälfte der Zahl aller Wurfergebisse mit Ausnahme der Diagonale ist. Ist n die Anzahl der Möglichkeiten für einen Wurf, so ergibt sich die Anzahl der günstigen Wurfergebnisse zu $\frac{n^2-n}{2}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann $\frac{n^2-n}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$. Mit größerem n kommt man immer näher an den Grenzwert $\frac{1}{2}$ heran.

Für den Ikosaeder ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{190}{400} = \frac{19}{40} = 0,475 = 47,5\%$, sie wird also größer.