Lösungen zum 3. Theelachter MaPhIA-Rundbrief (Oktober 2019)

Aufgabe 1: Sum of Three Cubes

Kann man 6 als Summe dreier Kubikzahlen darstellen? Klar, $6 = 8-1-1 = 2^3+(-1)^3+(-1)^3$. Aber die 11 oder 12 sind schon schwieriger! Und wer ein bisschen berühmt werden will, löst als Erster das Problem für 114. Keine Lösung gibt es für 4, 5 und 13. Warum?
(*Hinweis: Betrachte die Neunerreste von Kubikzahlen!*)

$11 = 27-8-8 = 3^3 + (-2)^3 + (-2)^3 = 258^3 + (-197)^3 + (-212)^3 = 619^3 + 297^3 + (-641)^3$
$12 = 10^3 + 7^3 + (-11)^3 = 9730705^3 + (-5725013)^3 + (-9019406)^3$

Kubikzahlen haben immer den Neunerrest 0, 1, oder 8 (also -1). Die Summe von drei Kubikzahlen kann also Neunerreste 0, 1, 2, 3, -1 (= 8), -2 (7) und -3 (6) haben, aber nie den Neunerrest 4 oder 5. Es gibt also keine Lösung für 4, 5, 13, 14, 22, 23, 31, 32, 40, 41, ...

Seit 2019 gibt es Lösungen für 33 und 42. Unter den Zahlen kleiner 1000 ist das Problem noch für $114, 165, 390, 579, 627, 633, 732, 906, 921$ und 975 offen.

Aufgabe 2: Twenty Bored Children

Zwanzig gelangweilte Schüler laufen in der Pausenhalle an einer Wand mit geschlossenen Fächern vorbei, die von 1 bis 20 durchnummeriert sind. Der erste Schüler öffnet alle Fächer. Der zweite Schüler schließt jedes zweite Fach (mit Nummern 2, 4, 6, ...) wieder. Der dritte Schüler bearbeitet jedes dritte Fach (mit Nummern 3, 6, 9, ...) folgendermaßen: Ist das Fach offen, schließt er es; ist es geschlossen, öffnet er es. So geht es weiter: Der i-te Schüler ändert nur die Fächer, deren Nummer durch i teilbar ist: Ist es offen, schließt er es; ist es geschlossen, öffnet er es. Wenn alle Schüler fertig sind, wie viele Fächer stehen offen? Welche?

Zu Beginn sind alle Fächer geschlossen. Eine *gerade* Anzahl von Änderungen eines Faches hinterlässt dieses geschlossen, eine *ungerade* Anzahl offen.

Der Zustand des Faches i ändert sich durch den Schüler j genau dann, wenn j ein Teiler von i ist. Der Zustand dieses Faches i wird auch durch den Schüler $\frac{i}{j}$ verändert. Bzgl. des Faches i heben sich die Aktionen der Schüler j und $\frac{i}{j}$ stets auf – aber nur, wenn j und $\frac{i}{j}$ *verschiedene* Schüler sind. Für $j = \frac{i}{j}$ handelt es sich aber um den gleichen Schüler. Dann ist $i = j^2$, also die Fachnummer i eine Quadratzahl. Die Fächer $1, 4, 9, 16$ werden daher eine ungerade Anzahl oft behandelt; es stehen zum Schluss diese 4 Fächer offen.

Aufgabe 3: Simpson's Paradox

Wer sind die besseren Fahrschüler? Frauen oder Männer?

In der ersten Woche hatte eine Fahrschule 9 Fahrprüfungen: 7 Frauen und 1 Mann haben bestanden, eine Frau ist durchgefallen. In der zweiten Woche gab es 5 Prüfungen: 2 Männer und 1 Frau haben bestanden; eine Frau und ein Mann sind durchgefallen.

Berechne die Durchfallquote für die Männer und die für die Frauen in der ersten Woche. Und noch einmal für die zweite Woche. Und ein drittes Mal für die gesamten 14 Tage! Vergleiche!

Etwas Misstrauen ist also nicht verkehrt, wenn nur prozentuale Angaben gemacht werden ...

Durchfallquoten
1. Woche: 0% der Männer, 12,5% der Frauen
2. Woche: $33\frac{1}{3}$% der Männer, 50% der Frauen
In beiden Fällen war die Durchfallquote der Frauen höher als die der Männer.

14 Tage: 25% der Männer und 20% der Frauen.
Insgesamt ist also die Durchfallquote der Männer höher.

Scherzfrage: Welche Seeleute kennen die Kreiszahl $\pi = 3{,}14159\ldots$ nicht so genau?
Die Piraten, denn sie müssen π raten.

Aufgabe 4: Sea Water

Wasser dehnt sich (oberhalb von 4°C) bei Erwärmung aus.
Schätze grob ab, um wie viel der Meeresspiegel steigt, wenn sich das Meerwasser um 1° erwärmt.
(Die durchschnittliche Meerestiefe beträgt 3800 m, der Wärmeraumausdehnungskoeffizient von Wasser bei 20°C beträgt 0,000206/°C.)

Der Wärmeraumausdehnungskoeffizient γ von Wasser ist sehr temperaturabhängig: bei 10°C 0,000082/°C, bei 20°C 0,000206/°C, bei 30°C 0,000306/°C, bei 40°C 0,000389/°C. Und die Temperatur des Meerwassers ist sehr unterschiedlich, sowohl regional, saisonal und abhängig von der Meerestiefe. Auch wird die durch den höheren Wasserspiegel überschwemmte zusätzliche Fläche ignoriert. Und weitere Faktoren wie schmelzendes Grönland- oder Antarktis-Eis sind natürlich nicht berücksichtigt. Trotzdem gibt die Rechnung einen ersten Anhaltspunkt:
$3800\ m \cdot 0,000206/°C \cdot 1°C = 0,7828\ m \approx 80\ cm$