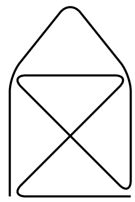
Lösungen zum 8. Theelachter MaPhIA-Rundbrief (Januar 2021)

Aufgabe 1: Der verspätete Nikolaus



Das Haus des Nikolaus soll man ja zeichnen, ohne den Stift abzusetzen.

Warum erkennt man schon nach dem ersten Strich, ob das erfolgreich wird oder nicht?

Wir zählen für jeden Eckpunkt der Zeichnung, wie viele Striche dort zusammenkommen. Wenn wir malen, brauchen wir einen Strich, um zu dem Punkt hinzukommen und einen Strich, um ihn zu verlassen. Punkte mit einer geraden Anzahl von Strichen sind also unproblematisch. Hat man aber Punkte mit einer ungeraden Anzahl, so muss man dort starten oder die Zeichnung beenden. Man kann also nur Figuren malen, die genau zwei (oder gar keine) Punkte mit ungerader Anzahl haben.

Das Haus vom Nikolaus hat eine Dachspitze (2 Striche) und zwei Deckenpunkte (je 4 Striche), aber auch zwei Bodenpunkte (je 3 Striche).
Man muss also zwingend von einem Bodenpunkt starten (und am anderen Bodenpunkt enden).

Aufgabe 2: Blumen

Christine liebt Blumen über alles. Sie wachsen in ihrem Garten – und oft steht ein Strauß auf dem Tisch. Ihre Freundin fragt sie, wie viele Blumen sie gerade in ihrer Wohnung hat, und Christine antwortet:

- Alle meine Blumen –bis auf drei– sind Rosen.
- Alle meine Blumen –bis auf drei– sind Tulpen.
- Alle meine Blumen –bis auf drei– sind Dahlien.

Wie viele Blumen es sind?

Christine hat entweder vier Blumen (eine Rose, eine Tulpe, eine Dahlie und eine andere) oder drei Blumen anderer Sorten, z.B. drei Nelken oder eine Nelke und zwei Sonnenblumen.

Die Anzahl der Blumen bezeichnen wir mit den Variablen: R = Rose, T = Tulpe, D = Dahlie, A = andere Blumen, G = Gesamtzahl der Blumen.

Es gilt dann: $G = R + T + D + A$

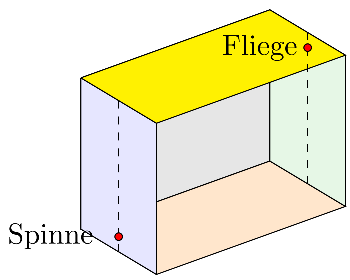
Die drei Aussagen von Christine: $R = G-3, \quad T = G-3, \quad D = G-3$

setzen wir in die Gleichung G = R+T+D+A ein: $G = (G-3) + (G-3) + (G-3) + A$

Vereinfacht: $2 \cdot G + A = 9$

Da alles natürliche Zahlen sind und $A \leq G$ gilt, hat diese Gleichung nur zwei Lösungen:
$G = 4$, $A = 1$: Christine hat vier Blumen: eine Rose, eine Tulpe, eine Dahlie und eine andere.
$G = 3$, $A = 3$: Christine hat drei Blumen, aber weder Rosen, Tulpen noch Dahlien.

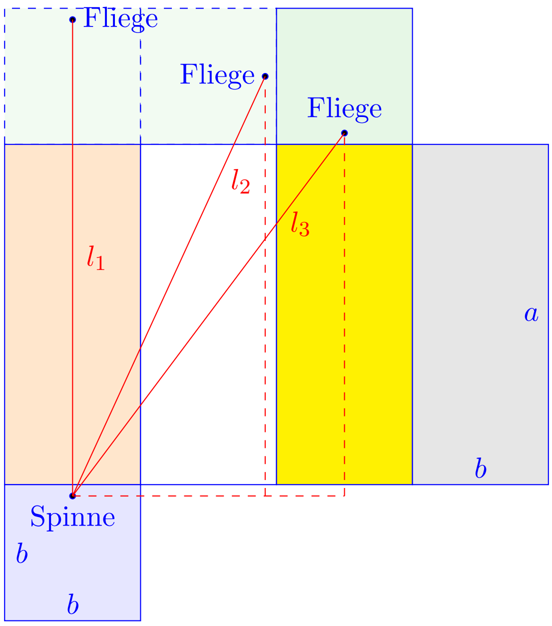
Aufgabe 3: Pfui Spinne



In einem Raum mit einer Grundfläche von 2,40 m × 6,00 m und 2,40 m hohen Wänden hockt auf der Mittellinie einer der beiden quadratischen Wände, 20 cm über dem Boden, eine Spinne. Auf der Mittellinie der gegenüberliegenden Wand, 20 cm unter der Decke, sitzt eine Fliege.

Die Spinne möchte die Fliege fressen. Da die Spinne nicht fliegen kann, krabbelt sie nur über Wände, Decke und/oder Fußboden. Wie lang ist der kürzeste Weg der Spinne zur Fliege?

8,00 m. Wir stellen uns den Raum als Pappschachtel vor, die wir entlang einiger Kanten aufschneiden und flach ausbreiten können. Je nachdem, wo wir schneiden, ist die Wand mit der Fliege am Boden befestigt, an einer Seitenwand oder an der Decke. Es gibt drei Strecken, die die Spinne zur Fliege nehmen kann. Schnitte man die Wände anders auf, so gäbe es weitere Wege, die entweder symmetrisch zu diesen drei Wegen oder noch länger sind.



Wir bezeichnen die 6,00 m langen Kanten mit a, die 2,40 m langen Kanten mit b und den Abstand von 0,20 m der Spinne vom Boden bzw. der Fliege von der Decke mit c.

Die drei Wege haben folgende Längen (für l_2 und l_3 nutzen wir den Satz von Pythagoras):

$l_1 = c + a + (b - c) = a + b = 8{,}40$ m

$l_2 = \sqrt{(b/2 + a + c)^2 + (b/2 + b - c)^2} \approx 8{,}14$ m

$l_3 = \sqrt{(c + a + c)^2 + (b/2 + b + b/2)^2} = \sqrt{(a + 2c)^2 + (2b)^2} = 8{,}00$ m

Der kürzeste Weg der Spinne bis zur Fliege verläuft also über drei Wände, über den Boden und die Decke des Raumes.

Aufgabe 4: Erbe

Ein alter Mann spürt, dass ihm nur noch wenige Stunden bleiben. Er möchte noch sein Erbe regeln, ruft seine Kinder zusammen und sagt: „Jeder soll gleich viele Münzen bekommen.“

Dann gibt er dem ältesten Kind eine Goldmünze und genau $\frac{1}{7}$ der verbleibenden Münzen. Das zweitälteste Kind bekommt zwei Münzen und exakt $\frac{1}{7}$ des Restes. Das drittälteste Kind bekommt drei Münzen und genau $\frac{1}{7}$ des Restes.

Dann stirbt der Mann. Aber er hatte weder alle Goldstücke verteilt noch alle Kinder bedacht. Wie viele Kinder hatte der Mann? (Eine Münze darf nicht geteilt werden.)

Der Mann hat 6 Kinder; das Erbe besteht aus 36 Goldmünzen, von denen jedes Kind 6 erhält.

Sei N die Anzahl der zu vererbenden Münzen.
Dann bekommt das älteste Kind so viele Münzen: $1 + \frac{1}{7} \cdot (N - 1)$

Bleiben $\frac{6}{7} \cdot (N - 1)$ Münzen übrig. Das zweitälteste erhält dann: $2 + \frac{1}{7} \cdot \left[\frac{6}{7} \cdot (N - 1) - 2\right]$

Beide Anzahlen sollen gleich groß sein: $1 + \frac{1}{7} \cdot (N - 1) = 2 + \frac{1}{7} \cdot \left[\frac{6}{7} \cdot (N - 1) - 2\right]$

Das ist eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten, die wir leicht nach N auflösen können:

Subtrahiere 1: $\frac{1}{7} \cdot (N - 1) = 1 + \frac{1}{7} \cdot \left[\frac{6}{7} \cdot (N - 1) - 2\right]$

Multipliziere mit 7: $N - 1 = 7 + \frac{6}{7} \cdot (N - 1) - 2$

Vereinfache: $N = 6 + \frac{6}{7} \cdot (N - 1)$

Multipliziere mit 7: $7 \cdot N = 42 + 6 \cdot (N - 1)$

Vereinfache: $7 \cdot N - 6 \cdot N = 42 - 6$

Das Ergebnis lautet: $N = 36$

Das älteste Kind bekommt daher $1 + \frac{1}{7} \cdot 35 = 6$ Münzen. Es gibt also $\frac{36}{6} = 6$ Kinder.