Lösungen zum 9. Theelachter MaPhIA-Rundbrief (April 2021)

Problem 1: Ein unfaires Spiel

Spielregel: Du setzt 1 Euro auf eine der sechs Zahlen eines Würfels. Dann werden drei Würfel gleichzeitig geworfen.

- Ist die von Dir gewählte Zahl nicht dabei, verlierst Du Deinen Einsatz (1 Euro).
- Sonst bekommst Du Deinen Einsatz zurück und für jeden Würfel, der Deine Zahl zeigt, einen weiteren Euro. Du kannst also bis zu 3 Euro gewinnen.

Warum ist das Spiel unfair? Kannst Du dieses Spiel fair machen?
Du willst das Spiel durch einen hohen Gewinn attraktiv machen. Was kannst Du ändern?

P.S.: Bei einem fairen Spiel machen alle Beteiligten auf lange Sicht (wenn der Zufall ausgeglichen ist) weder Gewinn noch Verlust.

Angenommen sechs Personen spielen das Spiel und jede Person setzt auf eine andere Zahl. Dann sind drei Fälle möglich:

- Alle Würfel zeigen verschiedene Augenzahlen. Drei Spieler behalten ihren Einsatz und gewinnen je einen Euro dazu. Die anderen drei Spieler verlieren ihren Einsatz. Zusammen haben sie 6 Euro gesetzt und bekommen 6 Euro ausgezahlt. Dieser Fall ist fair.
- Eine Augenzahl ist doppelt. Vier Spieler verlieren ihren Einsatz. Ein Spieler gewinnt zu seinem Einsatz zwei Euro dazu, der andere nur einen. Alle sechs Spieler zusammen haben nach dem Spiel nur noch fünf Euro – das Casino hat einen Euro gewonnen.
- Eine Augenzahl tritt dreimal auf. Fünf Spieler verlieren ihren Einsatz. Ein Spieler gewinnt zu seinem Einsatz drei Euro dazu. Das Casino hat zwei Euro gewonnen.

Das Spiel ist unfair: Sobald eine Augenzahl mehrfach auftritt, profitiert das Casino.

Um das Spiel fair zu machen, muss die Ausschüttung erhöht werden, z.B. bei doppelter Zahl ein Gewinn von 3 Euro (statt 2) und bei dreifacher Zahl ein Gewinn von 5 Euro (statt 3).

Es gibt noch mehr Möglichkeiten, um das Spiel fair zu machen. Wir analysieren noch mal die drei obigen Fälle und nennen den Gewinn, den man bei Auftreten von i gleichen Augenzahlen machen kann g_i, also: g_1, g_2 und g_3.

Im ersten Fall gewinnen und verlieren je 3 Spieler: $3 \cdot g_1 - 3$
Im zweiten Fall gewinnen 2 Spieler und es verlieren 4: $g_2 + g_1 - 4$
Im dritten Fall gewinnt 1 Spieler und es verlieren 5: $g_3 - 5$

Die drei Fälle treten aber nicht gleich häufig auf. Wir ermitteln, wie oft die Fälle auftreten:

- Im Fall 1 gibt es für den ersten Würfel 6 Möglichkeiten, der zweite Würfel darf nicht dieselbe Zahl wie der erste Würfel haben (5 Möglichkeiten) und der dritte Würfel muss noch eine andere Zahl zeigen (4 Möglichkeiten), also $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ Möglichkeiten.
- Im Fall 2 können die ersten beiden Würfel gleich sein (für den ersten Würfel gibt es 6, für den zweiten 1 und für den dritten Würfel 5 Möglichkeiten) oder der dritte Würfel ist gleich einem der anderen beiden (für den ersten Würfel gibt es 6, für den zweiten 5 und für den dritten Würfel 2 Möglichkeiten), also $6 \cdot 1 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 2 = 90$ Möglichkeiten.
- Im Fall 3 gibt es $6 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten.

Für jeden Würfel gibt es 6 verschiedene Ergebnisse, insgesamt also $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ Möglichkeiten.

Die Wahrscheinlichkeiten für die drei Fälle sind also
$\frac{120}{216} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \approx 55{,}56\%$, $\frac{90}{216} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \approx 41{,}67\%$ und $\frac{6}{216} = \frac{1}{36} \approx 2{,}78\%$.
Kombinieren wir diese Wahrscheinlichkeiten mit den Gewinnen und Verlusten, so erhalten wir eine Funktion, die bei Fairness Null liefern muss:

$$f(g_1, g_2, g_3) = \frac{20}{36} \cdot (3 \cdot g_1 - 3) + \frac{15}{36} \cdot (g_2 + g_1 - 4) + \frac{1}{36} \cdot (g_3 - 5)$$

Betrachten wir diese Funktion für unser Ausgangsspiel:
$f(1,2,3) = \frac{20}{36} \cdot (3 \cdot 1 - 3) + \frac{15}{36} \cdot (2 + 1 - 4) + \frac{1}{36} \cdot (3 - 5) = -\frac{15}{36} - 2 \cdot \frac{1}{36} = -\frac{17}{36} \approx -0{,}4722$, d.h. die 6 Spieler verlieren pro Runde gut 47 Cent, oder anders ausgedrückt, das Casino verdient knapp 8% des Einsatzes von 6 Euro.

Und wie behauptet ist $f(1,3,5) = 0$.

Wir wollen das Spiel fair machen, wissen aber, dass der Reiz eines Spieles mit großen Gewinnen steigt. Wir können einen großen Gewinn (bei den Fällen mit kleiner Wahrscheinlichkeit) versprechen, wenn wir bei den kleinen und häufigen Gewinnen sparen.

Wenn wir z.B. nur 50 Cent als Gewinn im Fall 1 versprechen und nur 1,50 Euro im Fall 2, welchen Gewinn können wir dann im Fall 3 versprechen und trotzdem ein faires Spiel anbieten?

Offenbar muss $f(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, g_3) = 0$ sein, also $f(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, g_3) =$
$\frac{20}{36} \cdot (3 \cdot \frac{1}{2} - 3) + \frac{15}{36} \cdot (\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 4) + \frac{1}{36} \cdot (g_3 - 5) = \frac{20}{36} \cdot (-\frac{3}{2}) + \frac{15}{36} \cdot (-2) + \frac{1}{36} \cdot (g_3 - 5) = -\frac{60}{36} + \frac{1}{36} \cdot (g_3 - 5) = 0$
$\Leftrightarrow -60 + g_3 - 5 = 0 \Leftrightarrow g_3 = 65$.

Ein faires Spiel würde dann im Fall 3 einen Gewinn von 65 Euro anbieten.

Will das Casino aber weiter den gleichen Gewinn machen, also $f(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, g_3) = -\frac{17}{36}$, so bietet es unter diesen Bedingungen im dritten Fall nur 48 Euro an.

Problem 2: Elf Teiler

Die kleinste Zahl mit 10 Teilern ist offenbar 48, die kleinste Zahl mit 12 Teilern ist 60.
Wie heißt die kleinste Zahl, die genau 11 Teiler hat?

1024.

Zerlegen wir eine Zahl z in ihre Primfaktoren:
$z = \underbrace{p_1 \cdot \ldots \cdot p_1}_{i_1\text{-mal}} \cdot \underbrace{p_2 \cdot \ldots \cdot p_2}_{i_2\text{-mal}} \cdot \underbrace{p_3 \cdot \ldots \cdot p_3}_{i_3\text{-mal}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{p_n \cdot \ldots \cdot p_n}_{i_n\text{-mal}} = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot p_3^{i_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{i_n}$
Jeder Teiler von z entsteht dadurch, dass man aus der Primfaktorzerlegung Faktoren weglässt.

Zum Beispiel $z = 48 = 16 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^1$.
Man kann den Faktor 2 weglassen: 4 mal, 3, 2, 1 oder 0 mal (5 Möglichkeiten). Man kann den Faktor 3 weglassen: 1 oder 0 mal (2 Möglichkeiten). Man kann beides unabhängig voneinander tun, insgesamt gibt es also $5 \cdot 2 = 10$ verschiedene Teiler: 1, 2, 4, 8, 16, 3, 6, 12, 24, 48.

Zum Beispiel $z = 60 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.
Man kann den Faktor 2 weglassen: 2, 1 oder 0 mal (3 Möglichkeiten). Man kann den Faktor 3 weglassen: 1 oder 0 mal (2 Möglichkeiten). Man kann den Faktor 5 weglassen: 1 oder 0 mal (2 Möglichkeiten). Man kann alles unabhängig voneinander tun, insgesamt gibt es also $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ verschiedene Teiler: 1, 2, 4, 3, 6, 12, 5, 10, 20, 15, 30, 60.

Jede Kombination $p_1^{j_1} \cdot p_2^{j_2} \cdot p_3^{j_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{j_n}$ mit $0 \leq j_k \leq i_k$ für $1 \leq k \leq n$ liefert einen Teiler von z.

Daher hat z genau $(i_1 + 1) \cdot (i_2 + 1) \cdot (i_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (i_n + 1)$ Teiler.

11 ist eine Primzahl. Daher ist $n = 1$ und $i_1 = 10$, also $z = p_1^{10}$.
Jede zehnte Potenz einer Primzahl hat also genau 11 Teiler (und alle anderen Zahlen nicht).
Für die kleinste dieser Zahlen nehmen wir die kleinste Primzahl 2 und erhalten $2^{10} = 1024$.

Problem 3: Farbenspiele

Chamäleons wechseln ihre Farbe, um mit ihren Artgenossen zu kommunizieren.

In einem Terrarium leben 7 spezielle Chamäleons. Jedes Tier kann drei Farben annehmen: rot, blau oder grün. Zur Zeit sind vier von ihnen rot gefärbt, zwei blau und eins ist grün.

Meist gehen sich Chamäleons aus dem Weg. Begegnen sich doch zwei Tiere, wechseln beide die Farbe – aber nur, wenn beide unterschiedlich gefärbt sind. Beide nehmen dann die dritte Farbe an. Treffen sich z.B. ein blaues und ein grünes Tier, sind danach beide rot.

Können irgendwann alle Chamäleons dieselbe Farbe haben? Falls ja, welche?

Wie ist die Situation, wenn Du zwei rote Chamäleons dazubekommst?

Im ersten Fall können alle Tiere blau werden. Treffen sich ein rotes und ein blaues Tier, werden daraus zwei grüne. Dann gibt es drei rote, ein blaues und drei grüne Tiere. Treffen sich dann jeweils ein rotes und ein grünes Chamäleon, sind danach alle Bewohner des Terrariums blau.

Im zweiten Fall gibt es keine Lösung. Dazu schauen wir uns an, wie sich die Anzahl der Tiere pro Farbe von Treffen zu Treffen ändert. Bei jedem Treffen unterschiedlich gefärbter Tiere passiert folgendes: Für zwei Farben verringert sich die Tieranzahl um 1; für die dritte Farbe erhöht sich die Tieranzahl um 2. Die Differenz der Tieranzahlen pro Farbe ändert sich durch ein Treffen also um 0 oder um 3 (bzw. -3); nach mehreren Treffen um ein Vielfaches von 3.

Folgende Tabelle zeigt die einzelnen Schritte für den ersten Fall:

	Anzahl der Tiere pro Farbe			Differenz der Anzahlen		
	Rot (R)	Blau (B)	Grün (G)	R – B	R – G	B – G
	4	2	1	2	3	1
R+B→G	3	1	3	2	0	-2
R+G→B	2	3	2	-1	0	1
R+G→B	1	5	1	-4	0	4
R+G→B	0	7	0	-7	0	7

Damit alle Tiere im Terrarium die gleiche Farbe annehmen können, muss es irgendwann für zwei Farben die gleiche Anzahl von Tieren geben; deren Differenz also 0 sein. Wenn diese Tiere sich dann paarweise treffen, nehmen sie alle die dritte Farbe an.

Da sich die Differenz der Tieranzahlen nur um ein Vielfaches von 3 ändern kann, muss (mindestens) eine der Differenzen am Anfang durch 3 teilbar sein, um zur 0 kommen zu können.

Sonst existiert –wie im zweiten Fall– keine Lösung. Denn hier betragen die Differenzen 6–2=4, 6–1=5 und 2–1=1, sind also keine Vielfachen von 3. Es ist daher im zweiten Fall unmöglich, dass alle Tiere die gleiche Farbe haben.

Problem 4: Pflastern!

Neele hat zwei unterschiedlich große, rechteckige Terrassen mit quadratischen Gehwegplatten gepflastert. Jede Terrasse ist einreihig mit roten Platten umrahmt; innen liegen graue Platten. Beide Terrassen enthalten genauso viele rote wie graue Platten.

Wie viele Platten hat Neele verlegt?

Die Terrassen haben die Größen 6×8=48 und 5×12=60. Neele hat also 108 Platten verlegt.

Ab einer gewissen Größe liegen innen mehr Platten als außen. Eine Terrasse der Größe 7×7 hat innen $5 \cdot 5 = 25$ Platten und außen $7 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 24$ Platten. Innen liegt also eine Platte mehr als außen. Verlängern wir diese Terrasse um eine Platte, kommen innen fünf Platten hinzu und außen nur zwei; der Überschuss der inneren Platten wird noch größer. Mindestens an einer Seite müssen die Terrassen deshalb kürzer sein als sieben Platten.

Andererseits liegen bei einer Breite von drei oder vier Platten außen mehr Platten als innen. Bei weniger als drei Platten Breite gibt es gar keine inneren Platten.

Wenn überhaupt, gibt es daher nur Lösungen mit einer Breite von fünf oder sechs Platten.

1. Fall Breite = 5: Die Terrasse hat die Länge L und die Breite 5. Dafür braucht man $5L$ Platten. Die Anzahl der Platten innen, $3 \cdot (L-2)$, muss dann genau halb so groß sein wie die Gesamtzahl der Platten $5L$. Also gilt: $5L/2 = 3 \cdot (L-2) \Leftrightarrow 5L = 6 \cdot (L-2) \Leftrightarrow L = 12$

2. Fall Breite = 6: Die Terrasse hat die Länge L und die Breite 6. Dafür brauchen wir $6L$ Platten. Die Anzahl der Platten innen, $4 \cdot (L-2)$, muss genau halb so groß sein wie $6L$: $6L/2 = 4 \cdot (L-2) \Leftrightarrow 6L = 8 \cdot (L-2) \Leftrightarrow L = 8$

Man kann das Problem auch mathematischer angehen:
Sei a die Länge der längeren und b die der kürzeren Seite der Terrasse (in Platten gemessen).
Die Anzahl der Platten innen beträgt $(a-2)(b-2)$, die Anzahl der Platten außen $2a+2b-4$.
Gesucht sind ganzzahlige, positive Lösungen der Gleichung $(a-2)(b-2) = 2a+2b-4$.
Oder umgeformt: $a(b-4) = 4b-8$. Für die Werte von b erhalten wir:

b	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a	$\frac{4}{3}$	0	-4	–	12	8	$\frac{20}{3}$	6	...

Ab $b \geq 7$ ist b die längere Seite und braucht daher nicht mehr betrachtet zu werden.