Calculating prime quadruples, its twins, triples, and quadruples

Die Berechnung von Primvierlingen, seinen Zwillingen, Drillingen und Vierlingen

Jimmy Brüggemann
info@ymmij.de

22. Dezember 2020
zuletzt ergänzt am 4. März 2021

We calculate prime quadruples, its twins, triples, and quadruples via their short numbers using a very reduced search space. In addition, we present an example of four prime quadruples at a minimal distance of 210.

Wir berechnen Primvierlinge, seine Zwillinge, Drillinge und Vierlinge über ihre Kurzzahlen in einem stark verkleinerten Suchraum. Außerdem geben wir ein Beispiel für vier Primvierlinge im minimalen Abstand von 210.

1 Prime Quadruples / Primvierlinge

A **prime number** is a positive integer with exactly two positive divisors.

Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl mit genau zwei positiven Teilern.

A **prime quadruple** consists of four consecutive prime numbers (p_1, p_2, p_3, p_4), $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ with $p_4 - p_1 \leq 8$.

For $p_1 > 5$ we have:
Due to the divisibility by 2 or 5 the last digit of a prime quadruple element must be 1, 3, 7, or 9. Moreover, one of any three integers a, $a+2$, $a+4$ is divisible by 3, i.e. only the differences 2, 4, 2 are possible for successive elements of a prime quadruple. Thus

Ein **Primvierling** besteht aus vier aufeinanderfolgenden Primzahlen (p_1, p_2, p_3, p_4), $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ mit $p_4 - p_1 \leq 8$.

Ist $p_1 > 5$, so gilt:
Wegen der Teilbarkeit durch 2 oder 5 ist die letzte Stelle eines Primvierlingselements 1, 3, 7 oder 9. Außerdem ist stets eine der Zahlen a, $a+2$, $a+4$ durch 3 teilbar, so dass nur die Differenzenfolge 2, 4, 2 für aufeinanderfolgende Elemente eines Primvierlings möglich ist. Damit gilt:

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{N} : (p_1, p_2, p_3, p_4) = (10n+1, 10n+3, 10n+7, 10n+9).}$$

A **candidate** for a prime quadruple is a quadruple $(10a+1, 10a+3, 10a+7, 10a+9)$. We name a the **short number** of this quadruple. For a given candidate (c_1, c_2, c_3, c_4) we have to test that all its elements are prime:

Ein Primvierlings-**Kandidat** ist ein Vierling $(10a+1, 10a+3, 10a+7, 10a+9)$. Wir nennen a die **Kurzzahl** dieses Vierlings. Für einen gegebenen Kandidaten (c_1, c_2, c_3, c_4) müssen wir prüfen, ob alle seine Elemente prim sind:

$$\begin{array}{l}\text{prime\_quadruple}(c_1,c_2,c_3,c_4) \Leftrightarrow \\ \text{prime}(c_1) \text{ and } \text{prime}(c_2) \text{ and } \text{prime}(c_3) \text{ and } \text{prime}(c_4) \Leftrightarrow \\ \forall q \le \sqrt{c_4},\ q \text{ prime} : c_1 \bmod q \ne 0 \text{ and } c_2 \bmod q \ne 0 \text{ and } c_3 \bmod q \ne 0 \text{ and } c_4 \bmod q \ne 0 \Leftrightarrow \\ \forall q \le \sqrt{c_4},\ q \text{ prime} : \text{not}(c_1 \bmod q = 0 \text{ or } c_2 \bmod q = 0 \text{ or } c_3 \bmod q = 0 \text{ or } c_4 \bmod q = 0)\end{array}$$

It is not clever to check the c_i one after the other, it is faster in parallel. In order to get rid of unsuccessful candidates as quickly as possible, we could test all candidate elements for divisibility by q for all prime numbers $q \le \sqrt{c_4}$, starting with the smallest.

Es ist nicht schlau, die c_i nacheinander zu prüfen, schneller geht es parallel. Um erfolglose Kandidaten so schnell wie möglich auszusortieren, könnten wir alle Elemente eines Kandidats testen auf Teilbarkeit durch q für alle Primzahlen $q \le \sqrt{c_4}$, beginnend mit den kleinsten.

Our goal is to **reduce the number of divisions**. Instead of testing all candidate elements c_i for having the remainder 0 when divided by q, we divide the short number a of the candidate by q and check against those corresponding remainders, which may cause exclusion of the candidate.

Thus for a candidate $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (10a+1, 10a+3, 10a+7, 10a+9)$ we are looking for four remainders r_i, such that

Wir wollen die **Anzahl an Divisionen klein halten**. Statt alle Elemente c_i auf Rest 0 bei Teilbarkeit durch q zu prüfen, teilen wir stattdessen die Kurzzahl a des Kandidaten durch q und überprüfen auf diejenigen Reste, die der ursprünglichen Teilbarkeit entsprechen und daher zum Ausschluss des Kandidaten führen.

Für einen Kandidaten $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (10a+1, 10a+3, 10a+7, 10a+9)$ suchen wir also nach vier Resten r_i mit

$$\begin{array}{lllllll} c_1 \bmod q = 0 & \text{or} & c_2 \bmod q = 0 & \text{or} & c_3 \bmod q = 0 & \text{or} & c_4 \bmod q = 0 \quad \Leftrightarrow \\ a \bmod q = r_1 & \text{or} & a \bmod q = r_2 & \text{or} & a \bmod q = r_3 & \text{or} & a \bmod q = r_4 \end{array}$$

Fortunately, these remainders are easy to calculate and depend only on q (and not on a). We only have to distinguish between the last digit of q. See [Brüg 1975] for details.

Glücklicherweise sind diese vier Reste einfach zu berechnen und hängen nur von q (und nicht von a) ab. Wir müssen nur eine Fallunterscheidung nach der letzten Ziffer des Teilers q vornehmen. Für Details siehe [Brüg 1975].

candidate elements Elemente des Kandidaten	divisor / Teiler $q =$ $10b+1$	$10b+3$	$10b+7$	$10b+9$
$c_1 = 10a+1$	b	$7b+2$	$3b+2$	$9b+8$
$c_2 = 10a+3$	$3b$	b	$9b+6$	$7b+6$
$c_3 = 10a+7$	$7b$	$9b+2$	b	$3b+2$
$c_4 = 10a+9$	$9b$	$3b$	$7b+4$	b

remainders for exclusion when dividing the short number a by divisor q.
Ausschluss-Reste bei Division der Kurzzahl a durch den Teiler q.

Sorting and renaming these remainders and undoing the case selection results in:

Fügt man die Fälle wieder zusammen, erhält man –nach der Größe sortiert und neu benannt– folgende Reste:

$$\begin{array}{l} r_1(q) = q \text{ div } 10, \\ r_2(q) = \text{IF } q \bmod 10 < 5 \text{ THEN } 3 \cdot r_1(q) \text{ ELSE } 3 \cdot r_1(q) + 2, \\ r_3(q) = q - r_2(q) - 1, \\ r_4(q) = q - r_1(q) - 1. \end{array}$$

We exclude a candidate if dividing the short number by 3 leaves a remainder 0 or 2, if dividing by 7 leaves one of the remainders 0, 2, 4, or 6, and so on.

Ein Rest 0 oder 2 bei Division der Kurzzahl durch 3 führt also zum Ausschluss des Kandidaten, ebenso ein Rest 0, 2, 4 oder 6 bei Division durch 7, usw.

Moreover, these remainders not only help us determine which candidates can be excluded but we can use all *other* remainders to **restrict the search space** for the candidates.

Diese Reste helfen uns nicht nur festzustellen, welche Kandidaten ausgeschlossen werden können, sondern wir können die *übrigen* Reste nutzen, um den **Suchraum einzuschränken** für die Kandidaten.

To be a prime quadruple it is therefore necessary that its short number has the remainder 1 when divided by 3, and has one of the remainders 1, 3 or 5 when divided by 7 and so on.

Um ein Primvierling zu sein, ist es daher notwendig, dass seine Kurzzahl den Rest 1 hat bei Division durch 3 sowie einen der Reste 1, 3 oder 5 bei Division durch 7 und so weiter.

Of course, these conditions can be combined: The short number must have one of the remainders 1, 10 or 19 when divided by 21. Or, even better, one of the remainders 10, 19, 22, 43, 52, 61, 82, 85, 94, 103, 115, 127, 136, 145, 148, 169, 178, 187, 208, 211 or 220 when divided by 231. In this way –and by using additional prime numbers for the combined conditions– most candidates can be excluded without any test.

Natürlich können diese Bedingungen kombiniert werden: Die Kurzzahl muss einen der Reste 1, 10 oder 19 haben bei Division durch 21. Oder, besser, einen der Reste 10, 19, 22, 43, 52, 61, 82, 85, 94, 103, 115, 127, 136, 145, 148, 169, 178, 187, 208, 211 oder 220 bei Division durch 231. Auf diese Weise –und durch Nutzung weiterer Primzahlen für die kombinierten Bedingungen– können die meisten Kandidaten ohne irgendeinen Test ausgeschlossen werden.

	a				necessary remainders	combined conditions	
q	r_1	r_2	r_3	r_4	notwendige Reste	$\Pi\ q$	kombinierte Bedingungen
3	0	0	2	2	1	3	1
7	0	2	4	6	1, 3, 5	21	1, 10, 19
11	1	3	7	9	0, 2, 4, 5, 6, 8, 10	231	10, 19, 22, 43, 52, 61, 82, 85, 94, 103, ...
13	1	3	9	11	0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12	3003	...
$\vdots$	remainders for exclusion Ausschluss-Reste						

Let $r(a,q) = a \mod q$ for a candidate a and a divisor q. Due to the structure of the remainders $r_i(q)$ we have

Sei $r(a,q) = a \mod q$ für einen Kandidaten a und Teiler q. Wegen der Struktur der Reste $r_i(q)$ gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l}
r(a,q) = r_1(q) \quad \text{or} \quad r(a,q) = r_2(q) \quad \text{or} \quad r(a,q) = r_3(q) \quad \text{or} \quad r(a,q) = r_4(q) \quad \Leftrightarrow \\
r(a,q) = r_1(q) \text{ or } r(a,q) = r_2(q) \text{ or } r(a,q) = q - r_2(q) - 1 \text{ or } r(a,q) = q - r_1(q) - 1 \Leftrightarrow \\
r(a,q) = r_1(q) \text{ or } r(a,q) = r_2(q) \text{ or } q - 1 - r(a,q) = r_2(q) \text{ or } q - 1 - r(a,q) = r_1(q) \Leftrightarrow \\
\begin{cases} r_1(q) = r(a,q) \text{ or } r_2(q) = r(a,q) & \text{if } r(a,q) \leq q \text{ DIV } 2 \\ r_1(q) = \bar{r}(a,q) \text{ or } r_2(q) = \bar{r}(a,q) & \text{if } r(a,q) > q \text{ DIV } 2, \bar{r}(a,q) = q - 1 - r(a,q) \end{cases}
\end{array}}$$

This may be efficient if DIV 2 is done by shifting.

Das kann effizient sein, falls die Operation DIV 2 durch Verschieben der Dualzahl geschieht.

2 Twins of Prime Quadruples / Primvierlingszwillinge

To be a prime quadruple its short number must have the remainder 1 when divided by 3. That is why two prime quadruples have at least a distance of 30.

Um ein Primvierling zu sein, muss seine Kurzzahl den Rest 1 bei Division durch 3 haben. Daher haben zwei Primvierlinge mindestens einen Abstand von 30.

A **twin of prime quadruples** consists of two prime quadruples with a (minimal) distance of 30:

Ein **Primvierlingszwilling** besteht aus zwei Primvierlingen im (minimalen) Abstand von 30:

$\boxed{(p_1, p_2, p_3, p_4) \text{ and/und } (p_1{+}30, p_2{+}30, p_3{+}30, p_4{+}30)}$ i.e. / also

$\boxed{(10n{+}1, 10n{+}3, 10n{+}7, 10n{+}9) \text{ and/und } (10n{+}31, 10n{+}33, 10n{+}37, 10n{+}39).}$

A twin **candidate** is an 8-tuple $(10a{+}1, 10a{+}3, 10a{+}7, 10a{+}9, 10a{+}31, 10a{+}33, 10a{+}37, 10a{+}39)$. Again, we call a the **short number** of this candidate. For a given candidate we have to check that all its elements are prime. Of course, we now have to use all prime numbers $q \leq \sqrt{10a+39}$ as divisor. We check whether the prime quadruple candidates with the short numbers a and $a+3$ are both prime quadruples.

Ein Zwillings-**Kandidat** ist ein 8-Tupel $(10a{+}1, 10a{+}3, 10a{+}7, 10a{+}9, 10a{+}31, 10a{+}33, 10a{+}37, 10a{+}39)$. Wir nennen a wieder die **Kurzzahl** dieses Kandidaten. Für einen Kandidaten müssen wir prüfen, ob alle seine Elemente prim sind. Natürlich müssen wir jetzt als Teiler q alle Primzahlen mit $q \leq \sqrt{10a+39}$ nutzen. Wir prüfen, ob die Primvierling-Kandidaten mit den Kurzzahlen a und $a+3$ beide Primvierlinge sind.

We test candidates a and $a+3$ simultanously. In general, if we have candidates a and $a+b$ and know the remainders $r_i(q)$ for candidate a and divisor q then we get the remainders for $a+b$ as

Wir testen die Kandidaten a und $a+3$ gleichzeitig. Haben wir Kandidaten a und $a+b$ und kennen die Reste $r_i(q)$ für den Kandidaten a und Teiler q, so erhalten wir die Reste für $a+b$ als

$$\boxed{r_i'(q) = \begin{cases} r_i(q) - b & \text{if } r_i(q) - b \geq 0 \\ r_i(q) - b + k \cdot q & \text{if } r_i(q) - b < 0 \end{cases}}$$

for some k.

für geeignetes k.

	a				$a+3$				necessary remainders	combined conditions	
q	r_1	r_2	r_3	r_4	r_1'	r_2'	r_3'	r_4'	notwendige Reste	$\Pi\ q$	kombinierte Bedingungen
3	0	0	2	2	0	0	2	2	1	3	1
7	0	2	4	6	4	6	1	3	5	21	19
11	1	3	7	9	9	0	4	6	2, 5, 8, 10	231	19, 82, 145, 208
13	1	3	9	11	11	0	6	8	2, 4, 5, 7, 10, 12	3003	82, 145, 376, 439, 670, 712, ...
$\vdots$	remainders for exclusion Ausschluss-Reste										

Again, these conditions can be combined and the search space restricted further: It is enough to test a short number only if it has the remainder 19 when divided by 21. Or if it has one of the remainders 19, 82, 145, or 208 when divided by 231. In this way, even more candidates can be excluded without any test.

Diese Bedingungen können wieder kombiniert und der Suchraum weiter eingeschränkt werden: Nur Kurzzahlen mit Rest 19 bei Division durch 21 brauchen noch getestet werden. Oder Kurzzahlen mit einem der Reste 19, 82, 145, oder 208 bei Division durch 231. Auf diese Weise können noch mehr Kandidaten ohne einen Test ausgeschlossen werden.

Many twins of prime quadruples you will find here.

Viele Primvierlingszwillinge gibt es hier.

The distance of two twins of prime quadruples is at least 420. Why? The combined conditions for divisors 3, 7, 11, and 13 have remainders 82, 145, 376, 439, 670, 712, 901, 943, 1006, 1174, 1237, 1468, 1531, 1762, 1825, 1993, 2056, 2098, 2287, 2329, 2560, 2623, 2854, and 2917.

Der Abstand zwischen zwei Primvierlingszwillingen beträgt mindestens 420. Warum? Die kombinierten Bedingungen für die Teiler 3, 7, 11 und 13 liefern die Reste 82, 145, 376, 439, 670, 712, 901, 943, 1006, 1174, 1237, 1468, 1531, 1762, 1825, 1993, 2056, 2098, 2287, 2329, 2560, 2623, 2854

The minimum of the differences between two consecutive numbers is 42.

In February 2021 Klaus Muuss reported two twins with this distance of only 420 starting with 11.281.963.036.964.038.421.

und 2917. Das Minimum der Differenzen zweier aufeinanderfolgender Zahlen ist 42.

Im Februar 2021 berichtete Klaus Muuss über zwei Vierlingszwillinge mit diesem Abstand von 420 beginnend mit 11.281.963.036.964.038.421.

3 Triples of Prime Quadruples / Primvierlingsdrillinge

Since the short number of a prime quadruple has one of the remainders 1, 10, or 19 when divided by 21, the distance between successive prime quadruples is at least 90, 90, 30, 90, 90, ... Thus, the shortest distance between three prime quadruples is 30+90 or 90+30, a total of 120.

Da die Kurzzahl eines Primvierlings einen der Reste 1, 10 oder 19 bei Division durch 21 haben muss, haben aufeinanderfolgende Primvierlinge mindestens einen Abstand von 90, 90, 30, 90, 90, ... Der kürzeste Abstand von drei Primvierlingen ist daher 30 plus 90 oder 90 plus 30, insgesamt 120.

A **triple of prime quadruples** consists of three prime quadruples with a (minimal) distance of 120:

Ein **Primvierlingsdrilling** besteht aus drei Primvierlingen im (minimalen) Abstand von 120:

(p_1, p_2, p_3, p_4) and/und $(p_1+120, p_2+120, p_3+120, p_4+120)$ and/und
either/entweder $(p_1+30, p_2+30, p_3+30, p_4+30)$ or/oder $(p_1+90, p_2+90, p_3+90, p_4+90)$ i.e. / also

$(10n+1, 10n+3, 10n+7, 10n+9),(10n+31, 10n+33, 10n+37, 10n+39),(10n+121, 10n+123, 10n+127, 10n+129)$
$(10n+1, 10n+3, 10n+7, 10n+9),(10n+91, 10n+93, 10n+97, 10n+99),(10n+121, 10n+123, 10n+127, 10n+129)$

A triple **candidate** is a 12-tuple of either $(10a+1, 10a+3, 10a+7, 10a+9, 10a+31, 10a+33, 10a+37, 10a+39, 10a+121, 10a+123, 10a+127, 10a+129)$ with short number a or $(10a+1, 10a+3, 10a+7, 10a+9, 10a+91, 10a+93, 10a+97, 10a+99, 10a+121, 10a+123, 10a+127, 10a+129)$ with short number a. For a given candidate we have to check that all its elements are prime. Of course, we now have to use all prime numbers $q \le \sqrt{10a+129}$ as divisors q. We check whether the three prime quadruple candidates with the short numbers a, $a+3$, and $a+12$ are all prime quadruples or those with short numbers a, $a+9$, and $a+12$.

Ein Drillings-**Kandidat** ist ein 12-Tupel entweder $(10a+1, 10a+3, 10a+7, 10a+9, 10a+31, 10a+33, 10a+37, 10a+39, 10a+121, 10a+123, 10a+127, 10a+129)$ mit Kurzzahl a oder $(10a+1, 10a+3, 10a+7, 10a+9, 10a+91, 10a+93, 10a+97, 10a+99, 10a+121, 10a+123, 10a+127, 10a+129)$ mit Kurzzahl a. Für einen Kandidaten müssen wir prüfen, ob alle seine Elemente prim sind. Natürlich müssen wir jetzt als Teiler q alle Primzahlen mit $q \le \sqrt{10a+129}$ nutzen. Wir prüfen, ob die Primvierling-Kandidaten mit den Kurzzahlen a, $a+3$ und $a+12$ alle Primvierlinge sind oder die mit den Kurzzahlen a, $a+9$ und $a+12$.

We calculate the blue triples and red ones with separate programs.

Wir berechnen die blauen und die roten Drillinge mit getrennten Programmen.

For the blue triples we have to test the three candidates a, $a+3$, and $a+12$ simultanously.

Für die blauen Drillinge müssen wir die drei Kandidaten a, $a+3$ und $a+12$ gleichzeitig testen.

q	a r_1	r_2	r_3	r_4	$a+3$ r'_1	r'_2	r'_3	r'_4	$a+12$ r''_1	r''_2	r''_3	r''_4	necessary remainders notwendige Reste	$\Pi\ q$	combined conditions kombinierte Bedingungen
3	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	1	3	1
7	0	2	4	6	4	6	1	3	2	4	6	1	5	21	19
11	1	3	7	9	9	0	4	6	0	2	6	8	5, 10	231	82, 208
13	1	3	9	11	11	0	6	8	2	4	10	12	5, 7	3003	670, 1006, 1825, 2854
$\vdots$	remainders for exclusion / Ausschluss-Reste														

The search space is narrowed again by combining the conditions: The short number must have the remainder 19 when divided by 21. Or one of the remainders 82 or 208 when divided by 231. Again, even more candidates can be excluded without any test.

Durch Kombination der Bedingungen wird der Suchraum noch einmal eingeschränkt: Die Kurzzahl muss den Rest 19 haben bei Division durch 21. Oder einen der Reste 82 oder 208 bei Division durch 231. Wieder können auf diese Weise noch mehr Kandidaten ohne einen Test ausgeschlossen werden.

For the red triples we have to test the three candidates a, $a+9$, and $a+12$ simultanously.

Für die roten Drillinge müssen wir die drei Kandidaten a, $a+9$ und $a+12$ gleichzeitig testen.

q	a r_1	r_2	r_3	r_4	$a+9$ r'_1	r'_2	r'_3	r'_4	$a+12$ r''_1	r''_2	r''_3	r''_4	necessary remainders notwendige Reste	$\Pi\ q$	combined conditions kombinierte Bedingungen
3	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	1	3	1
7	0	2	4	6	5	0	2	4	2	4	6	1	3	21	10
11	1	3	7	9	3	5	9	0	0	2	6	8	4, 10	231	10, 136
13	1	3	9	11	5	7	0	2	2	4	10	12	6, 8	3003	136, 1165, 1984, 2320
$\vdots$	remainders for exclusion / Ausschluss-Reste														

The search space is narrowed again by combining the conditions: The short number must have the remainder 10 when divided by 21. Or one of the remainders 10 or 136 when divided by 231. Again, even more candidates can be excluded without any test.

Durch Kombination der Bedingungen wird der Suchraum noch einmal eingeschränkt: Die Kurzzahl muss den Rest 10 haben bei Division durch 21. Oder einen der Reste 10 oder 136 bei Division durch 231. Wieder können auf diese Weise noch mehr Kandidaten ohne Test ausgeschlossen werden.

A number of triples of prime quadruples are given here.

Einige Primvierlingsdrillinge gibt es hier.

4 Quadruples of Prime Quadruples / Primvierlingsvierlinge

Since the short number of a prime quadruple has one of the remainders 1, 10, or 19 when divided by 21, successive prime quadruples have a distance of at least 90, 90, 30, 90, 90, 30, ...

The shortest distance between four prime quadruples is therefore 30+90+90 or 90+30+90 or 90+90+30, a total of 210. We will show below that the case 90+30+90 cannot occur.

Da die Kurzzahl eines Primvierlings einen der Reste 1, 10 oder 19 bei Division durch 21 haben muss, haben aufeinanderfolgende Primvierlinge mindestens einen Abstand von 90, 90, 30, 90, 90, 30, ... Der kürzeste Abstand von vier Primvierlingen ist daher 30, 90, 90 oder 90, 30, 90 oder 90, 90, 30, insgesamt in jedem Fall 210. Wir zeigen unten, dass der Fall 90, 30, 90 nicht auftreten kann.

A **quadruple of prime quadruples** consists of four prime quadruples with a (minimal) distance of 210:

Ein **Primvierlingsvierling** besteht aus vier Primvierlingen im (minimalen) Abstand von 210:

(p_1, p_2, p_3, p_4) and/und $(p_1{+}210, p_2{+}210, p_3{+}210, p_4{+}210)$ as well as/sowie
either/entweder $(p_1{+}30, p_2{+}30, p_3{+}30, p_4{+}30)$ and/und $(p_1{+}120, p_2{+}120, p_3{+}120, p_4{+}120)$
or/oder $(p_1{+}90, p_2{+}90, p_3{+}90, p_4{+}90)$ and/und $(p_1{+}180, p_2{+}180, p_3{+}180, p_4{+}180)$.

Again, we can define candidates and short numbers, correspondingly. We calculate the blue quadruples and the red ones with separate programs.

Wieder können wir entsprechend Kandidaten und Kurzzahlen definieren. Wir berechnen die blauen und die roten Drillinge mit getrennten Programmen.

For the blue quadruples we have to test the four candidates a, $a+3$, $a+12$ and $a+21$ simultanously.

Für die blauen Vierlinge müssen wir die vier Kandidaten a, $a{+}3$, $a{+}12$ und $a{+}21$ gleichzeitig testen.

	a				$a+3$				$a+12$				$a+21$				necessary remainders		combined conditions
q	r_1	r_2	r_3	r_4	r'_1	r'_2	r'_3	r'_4	r''_1	r''_2	r''_3	r''_4	r'''_1	r'''_2	r'''_3	r'''_4	notwendige Reste	$\Pi\ q$	kombinierte Bedingungen
3	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	1	3	1
7	0	2	4	6	4	6	1	3	2	4	6	1	0	2	4	6	5	21	19
11	1	3	7	9	9	0	4	6	0	2	6	8	2	4	8	10	5	231	82
13	1	3	9	11	11	0	6	8	2	4	10	12	6	8	1	3	5, 7	3003	1006, 2854
17	1	5	11	15	15	2	8	12	6	10	16	3	14	1	7	11	0, 4, 9, 13	51051	5857, 13018, 20872, …
⋮	remainders for exclusion / Ausschluss-Reste																		

By combining the neccessary conditions the search space is further restricted: The short number must have the remainder 82 when divided by 231. Again, even more candidates can be excluded without any test.

Durch Kombination der Bedingungen wird der Suchraum weiter eingeschränkt: Die Kurzzahl muss den Rest 82 haben bei Division durch 231. Wieder können auf diese Weise noch mehr Kandidaten ohne einen Test ausgeschlossen werden.

For the red quadruples we have to test the four candidates a, $a+9$, $a+18$, and $a+21$ simultanously.

Für die roten Vierlinge müssen wir die vier Kandidaten a, $a+9$, $a+18$ und $a+21$ gleichzeitig testen.

	a				$a+9$				$a+18$				$a+21$				necessary remainders		combined conditions
q	r_1	r_2	r_3	r_4	r'_1	r'_2	r'_3	r'_4	r''_1	r''_2	r''_3	r''_4	r'''_1	r'''_2	r'''_3	r'''_4	notwendige Reste	$\Pi\ q$	kombinierte Bedingungen
3	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	1	3	1
7	0	2	4	6	5	0	2	4	3	5	0	2	0	2	4	6	1	21	1
11	1	3	7	9	3	5	9	0	5	7	0	2	2	4	8	10	6	231	127
13	1	3	9	11	5	7	0	2	9	11	4	6	6	8	1	3	10, 12	3003	127, 1975
17	1	5	11	15	9	13	2	6	0	4	10	14	14	1	7	11	3, 8, 12, 16	51051	127, 1975, 7981, 15142, ..
⋮	remainders for exclusion / Ausschluss-Reste																		

The search space is narrowed again by combining the conditions: The short number must have the remainder 127 when divided by 231. Again, even more candidates can be excluded without any test.

Durch Kombination der Bedingungen wird der Suchraum noch einmal eingeschränkt: Die Kurzzahl muss den Rest 127 haben bei Division durch 231. Auf diese Weise können weitere Kandidaten ohne Test ausgeschlossen werden. 051

One quadruple of prime quadruples has the short number 300.000.224.101.777.93, written in full[1]:

Ein Primvierlingsvierling hat die Kurzzahl 300.000.224.101.777.93, in voller Länge:

$$((300000224101777931, 300000224101777933, 300000224101777937, 300000224101777939),$$
$$(300000224101778021, 300000224101778023, 300000224101778027, 300000224101778029),$$
$$(300000224101778111, 300000224101778113, 300000224101778117, 300000224101778119),$$
$$(300000224101778141, 300000224101778143, 300000224101778147, 300000224101778149)).$$

In principle, a quadruple of prime quadruples could have the combination (p_1, p_2, p_3, p_4), $(p_1+90, p_2+90, p_3+90, p_4+90)$, $(p_1+120, p_2+120, p_3+120, p_4+120)$ und $(p_1+210, p_2+210, p_3+210, p_4+210)$. It turns out, that one of the 16 candidate elements is divisible by 11:

Im Prinzip käme auch die Kombination (p_1, p_2, p_3, p_4), $(p_1+90, p_2+90, p_3+90, p_4+90)$, $(p_1+120, p_2+120, p_3+120, p_4+120)$ und $(p_1+210, p_2+210, p_3+210, p_4+210)$ als Primvierlingsvierling in Frage. Eines der Elemente eines solchen Kandidaten ist stets durch 11 teilbar:

	a				$a+9$				$a+12$				$a+21$				necessary remainders	comb. cond.	
q	r_1	r_2	r_3	r_4	r'_1	r'_2	r'_3	r'_4	r''_1	r''_2	r''_3	r''_4	r'''_1	r'''_2	r'''_3	r'''_4	notwendige Reste	$\Pi\ q$	komb. Bed.
3	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	1	3	1
7	0	2	4	6	5	0	2	4	2	4	6	1	0	2	4	6	3	21	10
11	1	3	7	9	3	5	9	0	0	2	6	8	2	4	8	10	–	231	–
⋮	remainders for exclusion / Ausschluss-Reste																		

Every quadruple of prime quadruples contains a triple of prime quadruples:
If you already know a triple of prime quadruples

- with short number a, and if $a+21$ is the short number of a prime quadruple then you have found a quadruple of prime quadruples with short number a.
- with short number a, and if $a-9$ is the short number of a prime quadruple then you have found a quadruple of prime quadruples with short number $a-9$.

Jeder Primvierlingsvierling enthält einen Primvierlingsdrilling:
Kennt man bereits einen Primvierlingsdrilling

- mit Kurzzahl a und ist $a+21$ die Kurzzahl eines Primvierlings, so erhält man einen Primvierlingsvierling mit Kurzzahl a.
- mit Kurzzahl a und ist $a-9$ die Kurzzahl eines Primvierlings, so erhält man einen Primvierlingsvierling mit Kurzzahl $a-9$.

5 Quintuples of Prime Quadruples / Primvierlingsfünflinge

The combined conditions for a prime quadruple give the remainders 10, 19, 22, 43, 52, 61, 82, 85, 94, 103, 115, 127, 136, 145, 148, 169, 178, 187, 208, 211, 220, (241, 250, 253, 274) for divisors 3, 7, and 11. The minimum of the differences between the i-th and the $(i+5)$-th number is 33. This minimum occurs twice: at (82, 85, 94, 103, 115) and (115, 127, 136, 145, 148).

Die kombinierten Bedingungen für einen Primvierling liefern für die Teiler 3, 7 und 11 die Reste 10, 19, 22, 43, 52, 61, 82, 85, 94, 103, 115, 127, 136, 145, 148, 169, 178, 187, 208, 211, 220, (241, 250, 253, 274). Das Minimum der Differenzen zwischen der i-ten und der $i+5$-ten Zahl ist 33. Dieses Minimum kommt zweimal vor: bei (82, 85, 94, 103, 115) und (115, 127, 136, 145, 148).

A **quintuple of prime quadruples** consists of five prime quadruples with a (minimal) distance of 330:

Ein **Primvierlingsfünfling** besteht aus fünf Primvierlingen im (minimalen) Abstand von 330:

[1] In Jan 21 Klaus Muuss reported another quadruple of prime quadruples: 3.051.450.534.439.926.13.

(p_1, p_2, p_3, p_4), $(p_1{+}120, p_2{+}120, p_3{+}120, p_4{+}120)$, $(p_1{+}210, p_2{+}210, p_3{+}210, p_4{+}210)$
and/und $(p_1{+}330, p_2{+}330, p_3{+}330, p_4{+}330)$ as well as/sowie
either/entweder $(p_1{+}30, p_2{+}30, p_3{+}30, p_4{+}30)$ or/oder $(p_1{+}300, p_2{+}300, p_3{+}300, p_4{+}300)$.

The following tables show that it is not impossible that such a 20-tuple may exist, since the set of necessary remainders is not empty for all divisors.

Die folgenden Tabellen zeigen, dass ein solches 20-Tupel existieren kann, da die Menge der notwendigen Reste für alle Teiler nicht-leer ist.

	a				$a+3$				$a+12$				$a+21$				$a+33$				necessary remainders	comb. cond.	
q	r_1	r_2	r_3	r_4	r_1'	r_2'	r_3'	r_4'	r_1''	r_2''	r_3''	r_4''	r_1'''	r_2'''	r_3'''	r_4'''	r_1''''	r_2''''	r_3''''	r_4''''	notwendige Reste	$\Pi\ q$	komb. B
3	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	1	3	1
7	0	2	4	6	4	6	1	3	2	4	6	1	0	2	4	6	2	4	6	1	5	21	19
11	1	3	7	9	9	0	4	6	0	2	6	8	2	4	8	10	1	3	7	9	5	231	82
13	1	3	9	11	11	0	6	8	2	4	10	12	6	8	1	3	7	9	2	4	5	3003	1006
17	1	5	11	15	15	2	8	12	6	10	16	3	14	1	7	11	2	6	12	16	0, 4, 9, 13	51051	...
19	1	5	13	17	17	2	10	14	8	12	1	5	18	3	11	15	6	10	18	3	0, 4, 7, 9, 16	969969	...
⋮	remainders for exclusion / Ausschluss-Reste																						

	a				$a+12$				$a+21$				$a+30$				$a+33$				necessary remainders	comb. cond.	
q	r_1	r_2	r_3	r_4	r_1'	r_2'	r_3'	r_4'	r_1''	r_2''	r_3''	r_4''	r_1'''	r_2'''	r_3'''	r_4'''	r_1''''	r_2''''	r_3''''	r_4''''	notwendige Reste	$\Pi\ q$	komb. B
3	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	1	3	1
7	0	2	4	6	2	4	6	1	0	2	4	6	5	0	2	4	2	4	6	1	3	21	10
11	1	3	7	9	0	2	6	8	2	4	8	10	4	6	10	1	1	3	7	9	5	231	115
13	1	3	9	11	2	4	10	12	6	8	1	3	10	12	5	7	7	9	2	4	0	3003	1963
17	1	5	11	15	6	10	16	3	14	1	7	11	5	9	15	2	2	6	12	16	0, 4, 8, 13	51051	...
19	1	5	13	17	8	12	1	5	18	3	11	15	9	13	2	6	6	10	18	3	0, 4, 7, 14, 16	969969	...
⋮	remainders for exclusion / Ausschluss-Reste																						

Every quintuple of prime quadruples contains a quadruple of prime quadruples:
If you already know a quadruple of prime quadruples

- with short number a, and if $a+33$ is the short number of a prime quadruple then you have found a quintuple of prime quadruples with short number a.
- with short number a, and if $a-12$ is the short number of a prime quadruple then you have found a quintuple of prime quadruples with short number $a-12$.

Jeder Primvierlingsfünfling enthält einen Primvierlingsvierling:
Kennt man bereits einen Primvierlingsvierling

- mit Kurzzahl a und ist $a+33$ die Kurzzahl eines Primvierlings, so erhält man einen Primvierlingsfünfling mit Kurzzahl a.
- mit Kurzzahl a und ist $a-12$ die Kurzzahl eines Primvierlings, so erhält man einen Primvierlingsfünfling mit Kurzzahl $a-12$.

But so far we do not know any example of a quintuple of prime quadruples.

Bisher kennen wir aber keinen Primvierlingsfünfling.

The number of **prime numbers** $\pi(x)$, of **prime quadruples** $\pi_4(x)$ (without (2, 3, 5, 7) and (3, 5, 7, 11)), of **twins** $\pi_{4,2}(x)$, of **triples** $\pi_{4,3}(x)$, of **quadruples** $\pi_{4,4}(x)$, and of **quintuples of prime quadruples** $\pi_{4,5}(x)$ less or equal than x:

Die Anzahl der **Primzahlen** $\pi(x)$, der **Primvierlinge** $\pi_4(x)$ (ohne (2, 3, 5, 7) und (3, 5, 7, 11)), der **Primvierlingszwillinge** $\pi_{4,2}(x)$, der **Primvierlingsdrillinge** $\pi_{4,3}(x)$, der **Primvierlingsvierlinge** $\pi_{4,4}(x)$ und der **Primvierlingsfünflinge** $\pi_{4,5}(x)$ kleiner gleich x:

x	$\pi(x)$	$\pi_4(x)$	$\pi_{4,2}(x)$	$\pi_{4,3}(x)$	$\pi_{4,4}(x)$	$\pi_{4,5}(x)$
10^1	4	0	0	0	0	0
10^2	25	2	0	0	0	0
10^3	168	5	0	0	0	0
10^4	1.229	12	0	0	0	0
10^5	9.592	38	0	0	0	0
10^6	78.498	166	0	0	0	0
10^7	664.579	899	4	0	0	0
10^8	5.761.455	4.768	5	0	0	0
10^9	50.847.534	28.388	18	0	0	0
10^{10}	455.052.511	180.529	65	0	0	0
10^{11}	4.118.054.813	1.209.318	267	0	0	0
10^{12}	37.607.912.018	8.398.278	1.238	2	0	0
10^{13}	346.065.536.839	60.070.590	6.196	3	0	0
10^{14}	3.204.941.750.802	441.296.836	33.480	9	0	0
10^{15}	29.844.570.422.669	3.314.576.487	187.932	28	0	0
10^{16}	279.238.341.033.925	25.379.433.651	1.095.882	138	0	0
10^{17}	2.623.557.157.654.233	197.622.677.481	6.629.220	613	0	0
10^{18}	24.739.954.287.740.860			2798	1	0
10^{19}	234.057.667.276.344.607					
10^{20}	2.220.819.602.560.918.840					
10^{21}	21.127.269.486.018.731.928					
10^{22}	201.467.286.689.315.906.290					
10^{23}	1.925.320.391.606.803.968.923					
10^{24}	18.435.599.767.349.200.867.866					
10^{25}	176.846.309.399.143.769.411.680					
10^{26}	1.699.246.750.872.437.141.327.603					
10^{27}	16.352.460.426.841.680.446.427.399					
10^{28}	157.589.269.275.973.410.412.739.598					
OEIS	A006880	A050258	A338866	A338868		