Lösungen zum 4. Theelachter MaPhIA-Rundbrief (Januar 2020)

Dieser Brief behandelt wieder **Ma**thematik-, **Ph**ysik- und **I**nformatik-**A**ngelegenheiten. Alle Briefe und Lösungen sind jetzt auch im Web (`www.ymmij.de/MaPhIA/`) nachzulesen.
Vielen Dank für alle Rückmeldungen zum 3. Brief. Viel Spaß! Jimmy Brüggemann

Warnung: Bei akuter Mathe- und Naturwissenschafts-Allergie auf keinen Fall weiterlesen!

Aufgabe 1: Römische Zahlen

Ihr kennt ja die arabischen Zahlen, die aus den Ziffern von 0 bis 9 zusammengesetzt sind. Diese Ziffern haben jeweils einen anderen Wert, je nachdem an welcher Stelle sie stehen.

Die alten Römer hatten andere Ziffern:
I für die 1, V für die 5, X für die 10, L für die 50, C für die 100, D für die 500, M für die 1000.
I, X, C und M dürfen mehrfach in einer Zahl vorkommen; V, L und D nur einmal.
Größere Ziffern stehen immer vor kleineren.
Also: III für 3, XXII für 22 und MDCLXXXVIII für 1688.

Ausnahme:
Damit eine Ziffer nicht viermal hintereinander vorkommen muss, darf man I, X und C auch vor größere Ziffern schreiben und dann sind sie negativ! Also: IV für 4, IX für 9, XL für 40.

Wie schreiben sich die Jahre 2020, 2220, 2222 und 2777 mit römischen Ziffern?

MMXX, MMCCXX, MMCCXXII, MMDCCLXXVII

Aufgabe 2: Hundert raffiniert zerlegt

Kannst Du die Zahl 100 als Summe von zwei oder mehr *aufeinanderfolgenden* natürlichen (also positiven ganzen) Zahlen darstellen?

Klar, 100 ist $5 \cdot 20$.
Ich habe also 5 Summanden der Größe 20.

Jetzt verschiebe ich noch 1 oder 2 von links nach rechts und schon habe ich eine Lösung:

$$18 + 19 + 20 + 21 + 22$$

1

$$20 + 20 + 20 + 20 + 20$$

2

Oh, funktioniert diese Methode nur für ungerade viele Summanden? Wie findet man alle Lösungen? Wie viele gibt es insgesamt?

Es gibt zwei verschiedene Lösungen:

$$18 + 19 + 20 + 21 + 22 \text{ (5 Summanden)}$$

$$9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 \text{ (8 Summanden)}$$

Die zweite Lösung entsteht aus dem Produkt $100 = 4 \cdot 25$.
Leider kommt man bei $25 + 25 + 25 + 25$ mit dem Verschiebetrick direkt nicht weiter. Teilen wir aber die 25 jeweils auf in 12+13, 11+14, 10+15 und 9+16, dann kommen wir ans Ziel.

Um systematisch alle Lösungen zu finden, schreiben wir die Summe als Formel auf.
Wir suchen n (≥ 2) aufeinanderfolgende Summanden, beginnend mit der Zahl a:

$$a + (a + 1) + (a + 2) + ... + (a + n - 1)$$

Sortiere alle Summanden a nach vorne, wende auf die Summe der Zahlen von 1 bis $n-1$ die Summenformel an und klammere dann n aus:

$$a + (a+1) + (a+2) + ... + (a+n-1) = na + \underbrace{1 + 2 + ... + (n-1)}_{\frac{(n-1)n}{2}} = na + \frac{(n-1)n}{2} = n\left(a + \frac{n-1}{2}\right)$$

Dies soll 100 ergeben:

$$100 = n\left(a + \frac{n-1}{2}\right)$$

Fall 1: n ist ungerade
Die Primfaktorzerlegung von 100 lautet $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. Als ungerade Faktoren sind für n (≥ 2) daher nur 5 oder 25 möglich. Setze diese Zahlen nacheinander in die Gleichung ein:

$n = 5$: $5(a+2) = 100 \Rightarrow a = 18$
$n = 25$: $25(a+12) = 100 \Rightarrow a = -8$ keine Lösung, weil a negativ

Damit ist die erste Lösung gefunden.

Fall 2: n ist gerade. Dann ist die Hälfte von n eine natürliche Zahl: Setze $n = 2m$.

$$100 = 2m\left(a + \frac{2m-1}{2}\right) = 2ma + m(2m-1) = m(2a+2m-1)$$

Der zweite Faktor $2a+2m-1$ ist ungerade und größer 1. $2a+2m-1$ kann daher nur 5 oder 25 sein; m muss dann 20 oder 4 sein. Dies setze ich in die Gleichung ein:

$m = 4$, $n = 8$: $100 = 4(2a+8-1) \Rightarrow a = 9$
$m = 20$, $n = 40$: $100 = 20(2a+40-1) \Rightarrow a = -17$ keine Lösung, weil a negativ

Damit ist die zweite Lösung gefunden.

Aufgabe 3: Der traurige Schäfer

Ein Schäfer hat bei der letzten Sturmflut fast alle mobilen Zäune verloren. Jetzt überlegt er, wie er aus seinem kargen Restbestand eine möglichst große Weidefläche abgrenzen kann. Soll er die Zäune rechteckig, kreisförmig oder quadratisch aufstellen?

Die Zäune bilden offenbar den Umfang U der abzugrenzenden Fläche A.

Gucken wir zunächst, was passiert, wenn Du aus einem Quadrat ein Rechteck machst, indem Du eine Seite etwas verlängerst und die andere Seite um das gleiche Stück verkürzt.

Sei a die Kantenlänge des Quadrats. Dann ist seine Fläche $A = a^2$.
Sei b (>0) die Länge, um die sich die Seiten des Quadrats verändern. Das entstehende Rechteck hat also die Seitenlängen $a+b$ und $a-b$. Seine Fläche beträgt daher $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$. Da b^2 positiv ist, wird die Fläche des Rechtecks kleiner.

Jetzt vergleichen wir das Quadrat mit dem Kreis:
Bei einem Quadrat mit der Kantenlänge a ergibt sich der Umfang zu $U = 4 \cdot a$ und die Fläche zu $A = a^2 = \frac{U^2}{16}$. Bei einem Kreis mit Radius r ergibt sich der Umfang zu $U = 2\pi r$ und die Fläche zu $A = \pi r^2 = \frac{U^2}{4\pi}$. Wegen $4\pi < 16$, also $\pi < 4$ hat der Kreis eine größere Fläche.

Aufgabe 4: Atomgewicht

Ein Atom besteht aus Protonen und Neutronen im Atomkern und Elektronen in der Atomhülle. Protonen und Neutronen wiegen fast gleich viel, die Masse eines Elektrons ist dagegen vernachlässigbar. In Einheiten relativ zu einer Protonenmasse wiegen Protonen und Neutronen also je 1 und Elektronen 0. Die Masse eines Kupferatoms wird zu 63,546 berechnet. Wieso ist diese relative Atommasse nicht ganzzahlig?

Das liegt an den Isotopen. Denn während jedes Element immer gleich viele Protonen hat, kann die Anzahl der Neutronen unterschiedlich sein. Da ein Element aus einer Mischung dieser Isotope besteht, kommt es zu einer nicht-ganzzahligen Atommasse. Kupfer z.B. hat immer 29 Protonen, aber 34 oder 36 Neutronen im Mischungsverhältnis von etwa 7 zu 3. Es gibt also Kupferatome mit der Masse 63 und mit 65.