Lösungen zum 5. Theelachter MaPhIA-Rundbrief (April 2020)

Dieser Brief behandelt wieder **Ma**thematik-, **Ph**ysik- und **I**nformatik-**A**ngelegenheiten. Alle Briefe und Lösungen sind unter `www.ymmij.de/MaPhIA/` nachzulesen. Vielen Dank für alle Rückmeldungen zum 4. Brief. Fragen und Anregungen auch gerne per `info@ymmij.de`

Viel Spaß! Jimmy Brüggemann

Warnung: Bei akuter Mathe- und Naturwissenschafts-Allergie auf keinen Fall weiterlesen!

Aufgabe 1: exponentielles Wachstum

Die Canaro-Intelligenz verbreitet sich rapide. Alle drei Tage werden doppelt so viele Leute Canaro-intelligent. Nach wie vielen Tagen, nachdem der erste Mensch Canaro-intelligent wurde, sind 83 Millionen Menschen genauso schlau? Und 8 Milliarden Menschen?

nach Tag 3: 2 Personen, Tag 6: 4, Tag 9: 8, ..., Tag 78: 67108864, Tag 81: 134217728, ..., Tag 96: 4294967296, Tag 99: 8589934592.

83 Millionen spätestens nach 81 Tagen, da $2^{26} = 67.108.864 < 83.000.000 < 2^{27} = 134.217.728$.
Es braucht also 26 bis 27 „Intelligenz-Ansteckungs-“Generationen. Jede dauert 3 Tage.

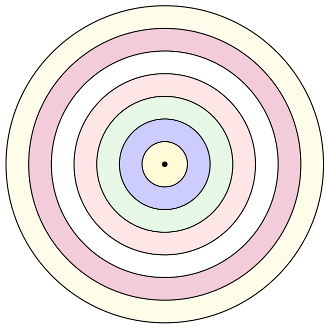
8 Milliarden spätestens nach 99 Tagen. Denn $2^{32} = 4.294.967.296$ und $2^{33} = 8.589.934.592$.

Das geht sogar genauer: $3 \cdot \log_2 83.000.000 \approx 3 \cdot 26{,}3066 \approx 78{,}92$ Tage und
$3 \cdot \log_2 8.000.000.000 \approx 3 \cdot 32{,}89735 \approx 98{,}692$ Tage.

Aufgabe 2: Zielscheibe

Sieben Ringe einer Zielscheibe haben alle die gleiche Breite. Benachbarte Ringe können zu einer Fläche zusammengefasst werden.

Wie viele gleich große Flächen findet man auf der Scheibe?



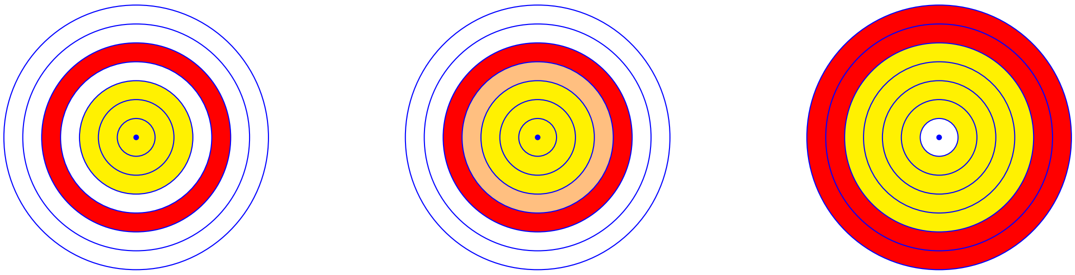
Bezeichnet man die Breite der Ringe mit r, dann haben die sieben Kreise der Zielscheibe die Flächeninhalte $\pi(1r)^2$, $\pi(2r)^2$, $\pi(3r)^2$, ... $\pi(7r)^2$. Alle zusammenhängenden Flächen erhalten wir, indem wir von einem Kreis mit Radius ir einen Kreis mit einem kleineren Radius jr entfernen. Die Flächen haben daher die Flächeninhalte $\pi(ir)^2 - \pi(jr)^2 = (i^2 - j^2)\pi r^2$, wobei $0 \le j < i \le 7$ ist. Da der Faktor πr^2 stets gleich ist, müssen wir nur testen, ob die Werte für $i^2 - j^2$ mehrfach vorkommen. Wir probieren alle Kombinationen für i und j durch:

					j			
	i^2-j^2	0	1	2	3	4	5	6
	1	1						
	2	4	3					
	3	9	8	5				
i	4	16	15	12	7			
	5	25	24	21	16	9		
	6	36	35	32	27	20	11	
	7	49	48	45	40	33	24	13

Nur in folgenden Fällen kommt der Wert $i^2 - j^2$ für verschiedene Paare (i, j) mehrfach vor:

$3^2 - 0^2 = 9 = 5^2 - 4^2$
$4^2 - 0^2 = 16 = 5^2 - 3^2$
$5^2 - 1^2 = 24 = 7^2 - 5^2$

In den Zeichnungen sind daher die gelben Flächen genauso groß wie die roten Flächen.



Die 2. Lösung entsteht aus der 1. Lösung durch Hinzufügen des 4. Rings zu *beiden* Flächen.

Aufgabe 3: Produkt und Summe

Klaudia hat fünf Zahlen aus der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ausgewählt. Wenn sie Jimmy das Produkt dieser Zahlen nennt, dann kann Jimmy nicht herausfinden, ob die Summe dieser Zahlen gerade oder ungerade ist. Wie lautet das Produkt der gewählten Zahlen?

420.

Kennt man das Produkt der gewählten Zahlen, kann man das Produkt der beiden übrigen Zahlen ermitteln. Produkte, die durch *mehrere* Paare der übrig gebliebenen Zahlen entstanden sein können, sind aber nur 12 ($3 \cdot 4$ oder $2 \cdot 6$) und 6 ($2 \cdot 3$ oder $1 \cdot 6$). Im zweiten Fall ist die Summe der beiden Zahlen aber stets ungerade (und damit die Summe der fünf gewählten Zahlen ebenfalls ungerade). Daher trifft der erste Fall zu. Das Produkt der gewählten Zahlen ist daher $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7)/12 = 420$.

Aufgabe 4: Die Schafe und der Schäferhund

Die Schafe am Deich sollen zu neuen Futtergründen. Genau dorthin bewegt sich die 50 Meter lange Herde gleichmäßig und zielgerichtet. Der Schäferhund rennt vom Ende der Herde bis an die Spitze und wieder zurück. Als er wieder hinten ankommt, hat die Herde 70 Meter zurückgelegt. Wieviele Meter ist der Hund gerannt?

Die (konstante) Geschwindigkeit der Schafe sei v_S, die des Hundes v_H. Als der Hund die Spitze der Herde erreicht, sei er x Meter gelaufen in t_1 Sekunden. Die Spitze der Herde hat 50 m Vorsprung vor dem Hund. Es gilt daher: $v_H = x/t_1$ und $v_S = (x-50)/t_1$

$$\text{Daraus erhalten wir:} \quad \frac{v_H}{v_S} = \frac{\frac{x}{t_1}}{\frac{x-50}{t_1}} = \frac{x}{x-50} \tag{1}$$

Jetzt muss der Hund zurücklaufen, von der aktuellen Position x bis zu 70 m nach dem Start. Zum Zeitpunkt t_2 kommt er an. Insgesamt ist der Hund dann $x + (x-70) = 2x - 70$ m gelaufen. Für die zweite Phase gilt: $v_S = (50 + 70 - x)/(t_2 - t_1)$ und $v_H = (x-70)/(t_2 - t_1)$

$$\frac{v_H}{v_S} = \frac{\frac{x-70}{t_2-t_1}}{\frac{120-x}{t_2-t_1}} = \frac{x-70}{120-x} \tag{2}$$

$$\text{Aus (1) und (2) folgt:} \quad \frac{v_H}{v_S} = \frac{x}{x-50} = \frac{x-70}{120-x}$$

$$x \cdot (120 - x) = (x-70)(x-50)$$

$$120x - x^2 = x^2 - 120x + 3500$$

$$x^2 - 120x + 1750 = 0$$

Die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen:

$$x = 60 \pm \sqrt{3600 - 1750} = 60 \pm \sqrt{1850} = 60 \pm \sqrt{25 \cdot 74} = 60 \pm 5\sqrt{74}$$

Wir wissen, dass der Hund mehr als 50 m laufen muss: $x > 50$. Also $x = 60 + 5\sqrt{74} \approx 103{,}01$

Der Gesamtweg des Hundes beträgt daher:
$x + (x-70) = 2x - 70 = 120 + 10\sqrt{74} - 70 = 50 + 10\sqrt{74} \approx 136{,}02$ Meter.

Es gibt **10 Gruppen** von Menschen: Die, die das Dualsystem verstanden haben und die, die nicht.
Die Ziffernfolge 10 hat im Dualsystem den Wert 2.