Lösungen zum 7. Theelachter MaPhIA-Rundbrief (Oktober 2020)

Aufgabe 1: Teile und Herrsche

Viele Jahre herrschte der König: Seine 9 Untertanen mussten hart arbeiten, aber der meiste Gewinn ging an ihn. Doch die Zeiten haben sich geändert. Das frustrierte Volk blies zur Revolution und aus dem Königreich wurde eine Demokratie. Aber weil der König seine Bürger so ausgequetscht hat, darf er nicht mitstimmen.

Doch der König gibt nicht auf: Er will sich zurückholen, was ihm seiner Meinung nach zusteht. Nun eben auf demokratischem Wege.

Jede Person bekommt jeden Monat einen Taler als Lohn ausgezahlt – auch der König.

Dieser Verteilungsschlüssel darf mit Mehrheit verändert werden. Jeder Bürger stimmt für eine Veränderung, sofern sein eigener Monatslohn steigt. Er stimmt dagegen, wenn sein Lohn sinkt. Verändert sich sein Lohn nicht, enthält er sich. Der König darf nicht mit abstimmen, aber nur er darf Vorschläge zur Verteilung des Geldes machen.

Welchen maximalen monatlichen Lohn kann sich der König sichern?

Zusatzfrage: Wenn das Volk aus n Personen (inklusive König) besteht, welche Höchstsumme ist dann für den König erreichbar?

Der König kommt auf einen Maximallohn von sieben Talern pro Monat.

In jedem Schritt wird der Lohn nicht der Hälfte der bisherigen Lohnempfänger weggenommen, sondern einer Person weniger. Die frei werdenden Taler gehen an die übrigen Lohnempfänger, die mindestens eine Person mehr sind als die Bürger, die ihren Lohn verlieren. Deshalb gibt es stets eine Mehrheit für die Umverteilung.

Ausgangssituation: Die neun Bürger und der König bekommen je einen Taler.

1. Der König und vier Bürger geben ihren Lohn ab an die fünf anderen Bürger. Fünf bekommen mehr Lohn, vier Bürger erhalten weniger. Die Umverteilung hat eine Mehrheit von 5:4, denn der König darf nicht mit abstimmen.

2. Zwei Bürger geben ihre insgesamt vier Taler an die drei anderen Bürger, die schon jeder zwei Taler bekommen. Auch diese Umverteilung hat eine Mehrheit (3:2).

3. Einer der drei Bürger, die noch Lohn bekommen, gibt sämtliche Münzen an die beiden anderen Lohnempfänger. Dafür gibt es eine Mehrheit von 2:1.

4. Die beiden Lohnempfänger verlieren alle ihre Taler. Sieben gehen an den König und je einer an drei Bürger, die keinen Lohn mehr hatten. Die Umverteilung hat eine Mehrheit von 3:2 Stimmen.

Niemals kann *ein* Bürger alle zehn Taler bekommen. Denn bei einer Umverteilung, die dazu führen würde, wäre diese Person die einzige mit einer Lohnsteigerung. Weil dadurch mindestens ein anderer Bürger weniger Lohn erhielte, gibt es dafür keine Mehrheit.

Zur Zusatzfrage: Nach vielen Umverteilungen werden die n Taler an nur noch zwei Personen ausgezahlt. In der nächsten Runde werden den beiden Lohnempfängern alle Taler weggenommen. Je ein Taler geht an drei Bürger, die zuvor keinen Lohn hatten; diese stimmen deshalb der neuen Lohnverteilung zu. Die beiden Bürger, die zuvor die Taler bekommen haben, stimmen zwar dagegen, bekommen aber keine Mehrheit. So bleiben $n-3$ Taler für den König.

Aufgabe 2: Schiffsausflug

Der Steuermann eines Ausflugsschiffs sagt an einem verregneten Nachmittag zum Smutje: „Heute waren nur 3 Passagiere auf dem Sonnendeck. Da konnte ich mich mit allen unterhalten.“

Der Smutje fragt ihn: „Wie alt waren die drei denn?“

Da stellt der Steuermann dem schlauen Smutje eine Aufgabe: „Das Produkt der Alter der drei ist 2450. Und wenn du die Zahlen zusammenzählst, erhältst du genau dein Alter.“

Der Smutje rechnet und denkt nach. Dann sagt er: „Also, so bekomme ich das nicht raus. Mir fehlen noch Informationen.“

Da sagt der Steuermann beiläufig: „Übrigens sind alle drei jünger als unser Kapitän.“ Da leuchten die Augen des Smutje: „Na klar, jetzt weiß ich, wie alt die sind.“

Das will ich aber gar nicht wissen, sondern: Wie alt ist der Kapitän?

Man zerlegt $2450 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$ auf alle Arten in drei Faktoren und berechnet deren Summe.

Alter1	Alter 2	Alter3	Summe
2450	1	1	2452
1225	2	1	1228
490	5	1	496
350	7	1	358
245	10	1	256
175	14	1	190
98	25	1	124
70	35	1	106
50	49	1	100
245	5	2	252

Alter1	Alter 2	Alter3	Summe
175	7	2	184
49	25	2	76
35	35	2	72
98	5	5	108
70	7	5	82
49	10	5	64
35	14	5	54
50	7	7	64
35	10	7	52
25	14	7	46

Da der Smutje keine Lösung findet, obwohl er die Summe (sein eigenes Alter) kennt, kommt nur die Summe 64 mit den Möglichkeiten (50, 7, 7) und (49, 10, 5) in Frage.

Wäre der Kapitän 49 Jahre alt oder jünger, dann wären in beiden Fällen nicht alle Passagiere jünger als der Kapitän. Wäre er 51 oder älter, dann könnte der Smutje keine Entscheidung treffen, denn in beiden Fällen wären alle jünger als der Kapitän. Also ist der Kapitän 50 Jahre und die drei Passagiere sind 49, 10 und 5 Jahre alt. (Und der Smutje ist 64.)

Aufgabe 3: Energiespeicher im Steinsalz

In Friedeburg-Etzel befindet sich ein Untertage-Speicher aus 75 Kavernen mit einem Gesamtvolumen von 46 Millionen m^3: 24 Kavernen für bis zu 11 Millionen m^3 Rohöl und 51 Kavernen für bis zu 4,5 Milliarden m^3 Erdgas. Wie kann das sein?

Während sich Flüssigkeiten kaum zusammendrücken lassen, geht das bei Gasen sehr gut. Die Menge des gespeicherten Erdgases bezieht sich daher auf den nicht-komprimierten Zustand, in der Kaverne steht das Gas unter Druck.

Aufgabe 4: Tee

Beim Tee muss die Zeit des Ziehens stimmen. Dafür hatte er sich schon zwei Sanduhren geleistet. Die eine läuft in drei Minuten durch, die andere in vier Minuten. Aber jetzt hat er einen Tee, der fünf Minuten ziehen soll. Er will nicht noch eine weitere Sanduhr kaufen.
Wie kann er mit den vorhandenen Sanduhren fünf Minuten abmessen?

Zusatzfrage: Wie ist die Situation, wenn die erste Sanduhr in zwei Minuten durchläuft?

Zuerst dreht man beide Sanduhren um. Ist eine Sanduhr abgelaufen, dreht man sie sofort wieder um, so dass sie wieder von vorne anfängt.
Die Zeitpunkte, die man kennt, sind also die Momente, in denen eine Uhr umgedreht wird.

Die erste Sanduhr misst die Zeitpunkte $0, 3, 6, \dots$ Minuten und die zweite $0, 4, 8, \dots$ Minuten. Liegen zwischen irgendwelchen dieser Zeitpunkte genau 5 Minuten? Offenbar zwischen 3 und 8. Also gießt er den Tee auf, wenn er die 3-Minuten-Uhr zum ersten Mal umgedreht hat und holt den Tee heraus, wenn er die 4-Minuten-Uhr zum zweiten Mal umgedreht.

Mathematisch steckt die Gleichung $5 = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3$ dahinter.

Zur Zusatzfrage: Dann kann man keine 5 Minuten abmessen, sondern nur Vielfache von 2, weil 2 der größte gemeinsame Teiler von 2 und 4 ist.